

RENDICONTI  
DELLE SEDUTE  
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

*Seduta del 6 dicembre 1903.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

---

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.*  
Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Considerazioni di metrica non-euclidea hanno condotto il sig. Servant a stabilire una notevole relazione fra le superficie isoterme (a linee di curvatura isoterme) e le superficie deformabili con conservazione dei raggi principali di curvatura (<sup>1</sup>). Egli trova che ogni superficie isoterma nota determina, mediante le loro *equazioni intrinseche*, due superficie applicabili al modo di Bonnet (<sup>2</sup>), ed inversamente ogni coppia di superficie applicabili di Bonnet determina *intrinsecamente* una superficie isoterma. Così si riconosce che i due problemi di determinare le superficie isoterme, ovvero le coppie di superficie applicabili di Bonnet, sono equivalenti a meno dell'integrazione di *equazioni differenziali del tipo di Riccati*. Scopo della presente Nota è di completare i risultati del Servant col dimostrare che l'integrazione delle equazioni di Riccati può essere risparmiata, bastando sole quadrature per passare da una superficie isoterma nota ad una coppia di superficie applicabili.

(<sup>1</sup>) Servant, *Sur deux problèmes de géométrie*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 2 Juin 1902, t. 134.

(<sup>2</sup>) Come è noto, il problema di determinare le coppie di superficie applicabili con conservazione dei raggi principali di curvatura fu trattato dal Bonnet (Journal de l'École Polytechnique 42<sup>e</sup>me Cahier 1867); diciamo per ciò brevemente ogni tale coppia di superficie *una coppia di Bonnet*.

bili di Bonnet ed inversamente. Tanto si ottiene utilizzando le proprietà delle rappresentazioni di Clifford delle superficie dello spazio ellittico studiate dal prof. Fubini nella sua tesi di laurea (<sup>1</sup>); così si rende in pari tempo palese la ragione geometrica dell' equivalenza dei due problemi.

Casi particolari notevoli di superficie isoterme dello spazio ellittico sono dati dalle superficie  $\Sigma$  d' area minima, o a curvatura media nulla, e più in generale da quelle di curvatura media costante. Se la superficie  $\Sigma$  è ad area minima, la coppia corrispondente di Bonnet di superficie applicabili dello spazio euclideo è formata da due superficie di curvatura media costante, che sono trasformate l' una dell' altra colla trasformazione involutoria di Hazzidakis; inversamente ogni tale coppia di superficie di curvatura media costante dà, con quadrature, una superficie minima dello spazio ellittico.

Quando la superficie  $\Sigma$  è di curvatura media costante non nulla, la coppia corrispondente di Bonnet è ancora di superficie a curvatura media costante; ma questa volta, anzichè da una trasformazione di Hazzidakis, le due superficie sono legate da una trasformazione di Lie Bonnet, cioè le linee di curvatura dell' una tagliano sotto angolo costante le linee che corrispondono a quelle di curvatura sull' altra.

Si vedrà poi che anche la trasformazione di Lie delle ordinarie superficie pseudosferiche è suscettibile, in geometria ellittica, di un' analoga interpretazione.

Le considerazioni di metrica ellittica qui svolte sotto un aspetto particolare, in vista dello speciale problema a cui si riferiscono, possono ricevere una più ampia interpretazione ed impiegarsi utilmente in altri problemi della teoria dell' applicabilità, come dimostrerò prossimamente.

2. Conviene dapprima che ricordiamo i risultati del Fubini, relativi alla doppia rappresentazione di Clifford di una superficie  $\Sigma$  dello spazio ellittico.

Per un punto fisso O dello spazio si conducano le parallele tutte nel senso *destrorso*, ovvero nel *sinistrorso* (<sup>2</sup>), alle diverse normali della superficie  $\Sigma$  e queste parallele si intersechino col piano  $\pi$  polare di O. Ogni punto P di  $\Sigma$  dà così due punti immagini Q, Q', situati sui detti raggi paralleli alla normale in P, alla distanza di un quadrante da O. I due punti Q, Q', movendosi P sopra  $\Sigma$ , descrivono sul piano  $\pi$  le due rappresentazioni di Clifford, destrorsa e sinistrorsa, della superficie  $\Sigma$ . Il Fubini ha dimostrato che le due figure descritte da Q, Q' si corrispondono per egualanza d' aree; ed inversamente se si ha una rappresentazione equivalente (che conservi le aree) del piano  $\pi$  sopra sè stesso, le due figure descritte da due punti corrispondenti sono sempre le immagini di Clifford di una superficie  $\Sigma$  dello spazio

(<sup>1</sup>) G. Fubini, *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellitici*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. IX, 1900.

(<sup>2</sup>) Vedi le mie: *Lezioni di geometria differenziale* (2<sup>a</sup> edizione), vol. I, § 198.

ellittico (e delle sue parallele). Note le due immagini di Clifford di una superficie  $\Sigma$ , questa si ottiene con quadrature (Fubini, l.c. § 20).

Si riferisca ora la superficie  $\Sigma$  alle sue linee di curvatura  $(u, v)$  e sia

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare di  $\Sigma$ ;  $r_1, r_2$  i suoi raggi principali di curvatura. In ogni punto di  $\Sigma$  si consideri il triedro principale formato 1° dalla tangente alla linea  $v = \text{cost}$ , 2° dalla tangente alla linea  $u = \text{cost}$ , 3° dalla normale alla superficie e si indichino rispettivamente con  $(X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $(X_2, Y_2, Z_2)$ ,  $(X_3, Y_3, Z_3)$  i parametri di scorrimento <sup>(1)</sup>, destrorsi o sinistrorsi, degli spigoli del triedro principale. Sussistono allora le formole fondamentali <sup>(2)</sup>:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 \pm \frac{\sqrt{E}}{r_1} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_1} X_1 \mp \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_2, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 \mp \frac{\sqrt{G}}{r_3} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial v} = \pm \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_1 + \frac{\sqrt{G}}{r_2} X_2, \end{array} \right.$$

colle analoghe per  $Y, Z$ , valendo i segni superiori per i parametri di scorrimento destrorsi, gli inferiori pei sinistrorsi.

3. Supponiamo ora che la superficie  $\Sigma$  sia a linee di curvatura  $(u, v)$  isotermi, ed introducendo parametri  $u, v$  isometrici, poniamo

$$E = G = e^{2\theta};$$

le (1) diventano

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \frac{e^\theta}{r_2} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1 \pm e^\theta X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{e^\theta}{r_2} X_1 \mp e^\theta X_2 \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2 \mp e^\theta X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \frac{e^\theta}{r_1} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \pm e^\theta X_1 + \frac{e^\theta}{r_1} X_2. \end{array} \right.$$

Queste dimostrano che le tre espressioni

$$e^{-\theta} (X_1 du - X_2 dv), \quad e^{-\theta} (Y_1 du - Y_2 dv), \quad e^{-\theta} (Z_1 du - Z_2 dv)$$

<sup>(1)</sup> *Lezioni*, vol. I, § 199.

<sup>(2)</sup> Queste si deducono facilmente dalle formole al § 215 delle mie *Lezioni*.

sono tre differenziali esatti. Poniamo:

$$(3) \quad x = \int e^{-\theta} (X_1 du - X_2 dv), \quad y = \int e^{-\theta} (Y_1 du - Y_2 dv), \quad z = \int e^{-\theta} (Z_1 du - Z_2 dv),$$

e riguardiamo  $x, y, z$  come coordinate cartesiane ortogonali di un punto mobile nello spazio euclideo; questo punto descriverà una superficie  $S$  di elemento lineare

$$(4) \quad ds^2 = e^{-2\theta} (du^2 + dv^2).$$

Per distinguere i parametri di scorrimento destrorsi dai sinistrorsi, indicheremo i primi colle notazioni superiori, i secondi colle analoghe

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3 \text{ ecc.}$$

Se poniamo ora

$$(3^*) \quad \bar{x} = \int e^{-\theta} (\bar{X}_1 du - \bar{X}_2 dv), \quad \bar{y} = \int e^{-\theta} (\bar{Y}_1 du - \bar{Y}_2 dv), \quad \bar{z} = \int e^{-\theta} (\bar{Z}_1 du - \bar{Z}_2 dv),$$

il punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  descriverà nello spazio euclideo una seconda superficie  $\bar{S}$  dello stesso elemento lineare (4), cioè applicabile sulla  $S$ .

Ma calcoliamo ora per  $S, \bar{S}$  le due seconde forme quadratiche fondamentali

$$\begin{aligned} D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \\ \bar{D} du^2 + 2\bar{D}' du dv + \bar{D}'' dv^2, \end{aligned}$$

per la qual cosa basterà osservare che la normale alla  $S$  ha i coseni di direzione  $X_3, Y_3, Z_3$  e la normale di  $\bar{S}$  i coseni  $\bar{X}_3, \bar{Y}_3, \bar{Z}_3$ . Osservando le (2), (3), (3\*), otteniamo così:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -\frac{1}{r_2}, \quad D' = -1, \quad D'' = \frac{1}{r_1} \\ \bar{D} = -\frac{1}{r_2}, \quad \bar{D}' = +1, \quad \bar{D}'' = \frac{1}{r_1}. \end{array} \right.$$

Come si vede, le due superficie applicabili  $S, \bar{S}$  non sono congruenti né simmetriche, avendo differenti (pel segno di  $D'$ ) le due seconde forme fondamentali. Però, calcolando le loro curvature medie  $H, \bar{H}$ , troviamo

$$(6) \quad H = \bar{H} = e^{2\theta} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right);$$

dunque: *Le due superficie  $S, \bar{S}$  dello spazio euclideo, dedotte con quadrature dalla superficie isoterma  $\Sigma$ , sono applicabili l'una sull'altra ed hanno,*

*in punti corrispondenti, gli stessi raggi principali di curvatura; costituiscono cioè una coppia di Bonnet.*

4. È facile invertire il risultato precedente e dimostrare che ad ogni coppia nota  $(S, \bar{S})$  di superficie applicabili al modo di Bonnet corrisponde una superficie isoterma  $\Sigma$  dello spazio ellittico.

Si riferiscono infatti le due superficie  $S, \bar{S}$  a quel sistema  $(u, v)$  che è formato dalle linee cinematicamente autoconiugate <sup>(1)</sup>, sicchè essendo

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

la prima forma fondamentale comune, le due seconde forme fondamentali siano date da

$$\begin{aligned} D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \\ D du^2 - 2D' du dv + D'' dv^2. \end{aligned}$$

Poichè  $S, \bar{S}$  hanno, in punti corrispondenti, eguale curvatura media, sarà

$$ED'' + GD - 2FD' = ED'' + GD + 2FD',$$

onde segue  $F = 0$ . Ma le equazioni di Codazzi, dovendo essere soddisfatte anche cangiando il segno di  $D'$ , si scindono nelle quattro:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial v} = \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} D - \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\} D'' = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \left( \frac{D}{E} + \frac{D''}{G} \right) \\ \frac{\partial D''}{\partial u} = \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} D'' - \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\} D = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \left( \frac{D}{E} + \frac{D''}{G} \right) \\ \frac{\partial D'}{\partial u} = \left( \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \right) D' = \frac{\partial}{\partial u} \left( \log \sqrt{\frac{G}{E}} \right) \cdot D' \\ \frac{\partial D'}{\partial v} = \left( \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 2 \end{array} \right\} \right) D' = \frac{\partial}{\partial v} \left( \log \sqrt{\frac{E}{G}} \right) \cdot D'. \end{array} \right.$$

Dalle due ultime si trae

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \log \sqrt{\frac{G}{E}} \right) = 0,$$

il che dimostra come il sistema  $(u, v)$  sia, oltre che ortogonale, isotermo. Prendendo parametri isometrici, potremo dunque porre

$$E = G = e^{-2\theta},$$

(1) *Lezioni ecc.*, vol. II, § 238.

dopo di che le prime due equazioni ( $\alpha$ ) danno

$$(\beta) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} (D + D'') \\ \frac{\partial D''}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} (D + D''), \end{cases}$$

e le due seconde ( $\alpha$ ) provano che si ha  $D' = \text{cost}^t e$ , onde si potrà fare  $D' = \pm 1$ , moltiplicando i parametri  $u, v$  per un fattore costante.

Si vede allora che nello spazio ellittico (di curvatura  $K_0 = +1$ ) esiste una superficie  $\Sigma$  a linee di curvatura isoterme ( $u, v$ ) coll'elemento lineare

$$ds^2 = e^{2\theta} (du^2 + dv^2)$$

e colle curvature principali date da

$$\frac{1}{r_2} = -D, \quad \frac{1}{r_1} = D''.$$

Si verifica infatti che risultano per tal modo soddisfatte le equazioni di Gauss e di Codazzi dello spazio ellittico. Questa superficie  $\Sigma$  ha per immagini di Clifford le due immagini sferiche di  $S, \bar{S}$ <sup>(1)</sup>. Per quanto ha dimostrato il Fubini (l. c.), segue che dalla coppia nota  $(S, \bar{S})$  di superficie di Bonnet si ottiene  $\Sigma$  con quadrature.

L'equivalenza dei due problemi è così stabilita geometricamente dalla proposizione:

*Le due immagini di Clifford di una superficie isoterma  $\Sigma$  dello spazio ellittico danno le immagini sferiche di una coppia di superficie  $(S, \bar{S})$  dello spazio euclideo, applicabili con conservazione dei raggi principali di curvatura, ed inversamente; alle linee di curvatura di  $\Sigma$  corrisponde il sistema cinematicamente autoconiugato di  $S, \bar{S}$ . Nota la superficie  $\Sigma$ , si ottiene con quadrature la coppia di Bonnet  $(S, \bar{S})$ , e viceversa.*

5. Consideriamo nello spazio ellittico una superficie  $\Sigma$  d'area minima. Riferendola alle sue linee di curvatura ( $u, v$ ) avremo<sup>(2)</sup>:

$$ds^2 = e^{2\theta} (du^2 + dv^2)$$

$$r_1 = e^{2\theta}, \quad r_2 = -e^{2\theta},$$

dove  $\theta$  è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + e^{2\theta} - e^{-2\theta} = 0.$$

(1) Come è ben noto il piano  $\pi$  della geometria ellittica può riguardarsi come una sfera di raggio = 1 dello spazio euclideo, che assumiamo qui come sfera rappresentativa di Gauss.

(2) *Lezioni*, vol. II, § 352.

Le formole (5) dimostrano che per la coppia  $(S, \bar{S})$  di superficie applicabili di Bonnet nello spazio euclideo, che si deducono colle quadrature (3), (3\*) da  $\Sigma$ , si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = e^{-2\theta} (du^2 + dv^2) \\ D = e^{-2\theta}, D' = -1, D'' = e^{-2\theta} \\ \bar{D} = e^{-2\theta}, \bar{D}' = +1, \bar{D}'' = e^{-2\theta}. \end{array} \right.$$

Esse hanno quindi la curvatura media costante  $= 2$  e le loro linee di curvatura sono le  $u \pm v = \text{cost}$ , che corrispondono alle linee assintotiche di  $\Sigma$ . Ne risulta che  $S, \bar{S}$  sono trasformate l'una dell'altra per la trasformazione involutoria di Hazzidakis <sup>(1)</sup>.

Possiamo dare a questi risultati la forma seguente:

*Se di una superficie minima  $\Sigma$  dello spazio ellittico si costruiscono le due immagini di Clifford delle linee assintotiche, queste sono le immagini sferiche delle linee di curvatura di due superficie  $S, \bar{S}$  a curvatura media costante dello spazio euclideo, coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis.*

Applichiamo ora alla coppia  $(S, \bar{S})$  una delle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura media costante che si deducono dall'inversione dei teoremi di Guichard; otterremo così una nuova coppia  $(S', \bar{S}')$  di tali superficie, coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis <sup>(2)</sup>. A questa coppia  $(S', \bar{S}')$  corrisponderà una nuova superficie minima  $\Sigma'$  dello spazio ellittico.

Quale è la relazione geometrica fra  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ ? Si può dimostrare che  $\Sigma, \Sigma'$  sono le due falde focali di una congruenza, e le due superficie  $\Sigma, \Sigma'$  si corrispondono per linee assintotiche e per linee di curvatura in una rappresentazione conforme. Troviamo così che anche nello spazio ellittico esistono le singolari congruenze  $W$  a falde focali d'area minima, scoperte da Thybaut per lo spazio euclideo <sup>(3)</sup>.

6. Prendiamo ora nello spazio ellittico una superficie  $\Sigma$  di curvatura media costante  $= \frac{1}{R}$  riferita alle sue linee di curvatura  $(u, v)$ ; avremo <sup>(4)</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = e^{2\theta} (du^2 + dv^2) \\ \frac{1}{r_2} = \frac{1 + e^{-2\theta}}{2R}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1 - e^{-2\theta}}{2R}, \end{array} \right.$$

(1) *Lezioni*, vol. II, §§ 237, 393.

(2) *Lezioni*, vol. II, § 405.

(3) Delle congruenze di Thybaut negli spazi di curvatura costante, e di altre classi speciali di congruenze, mi occupo in una Memoria di prossima pubblicazione negli Annali di matematica.

(4) Cf. la mia Memoria: *Sulle superficie d'area minima negli spazi di curvatura costante*. Atti dei Lincei, serie 4<sup>a</sup>, vol. IV, 1888.

essendo  $\theta$  una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$(7^*) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + e^{2\theta} \left( 1 + \frac{1}{4R^2} \right) - \frac{e^{-2\theta}}{4R^2} = 0,$$

che si riduce del resto alla (7), cangiando  $\theta, u, v$  in  $\theta + c, ku, kv$ , e determinando convenientemente le costanti  $c, k$ .

Per le superficie  $S, \bar{S}$  dello spazio euclideo, applicabili al modo di Bonnet, che le formole (3), (3<sup>\*</sup>) fanno derivare per quadrature dalla  $\Sigma$ , troviamo:

$$\begin{cases} ds^2 = e^{-2\theta} (du^2 + dv^2) \\ D = -\frac{1 + e^{-2\theta}}{2R}, D' = -1, D'' = \frac{1 - e^{-2\theta}}{2R} \\ \bar{D} = -\frac{1 + e^{-2\theta}}{2R}, \bar{D}' = +1, \bar{D}'' = \frac{1 - e^{-2\theta}}{2R} \end{cases}$$

e quindi

$$H = \bar{H} = -\frac{1}{R}.$$

Dunque le  $S, \bar{S}$  hanno ancora la medesima curvatura media costante. Ma siccome le loro rispettive linee di curvatura hanno le equazioni differenziali

$$du^2 \pm \frac{1}{R} du dv - dv^2 = 0,$$

vediamo che, applicando la  $S$  sulla  $\bar{S}$ , le antiche linee di curvatura taglano le nuove sotto un angolo costante  $\sigma$  dato dalla formola

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{1}{2R}.$$

Questa volta adunque le due superficie di curvatura media costante  $S, \bar{S}$  sono legate, invece che dalla trasformazione involutoria di Hazzidakis, da una trasformazione di Lie-Bonnet (<sup>1</sup>).

In successive Memorie pubblicate negli Annali di matematica (<sup>2</sup>) mi sono occupato delle trasformazioni delle superficie a curvatura media costante dello spazio euclideo e dello spazio ellittico (ed iperbolico) che nascono dalla inversione dei teoremi di Guichard. Le osservazioni precedenti collegano le relative trasformazioni nello spazio ellittico a quelle nello spazio euclideo. Vediamo che i risultati più completi si ottengono dallo spazio ellittico in quanto che i due sensi del parallelismo danno luogo ogni volta ad una coppia di superficie a curvatura media costante nello spazio euclideo, colle-

(<sup>1</sup>) *Lezioni*, vol. II, § 394.

(<sup>2</sup>) Serie 3<sup>a</sup>, t. III, IV e V.

gate da una trasformazione di Lie-Bonnet. Ne risulta così che le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura media costante sono permutabili, oltre che colla trasformazione di Hazzidakis (<sup>1</sup>), anche con quella di Lie-Bonnet.

7. I risultati precedenti conducono spontaneamente a proporsi un'altra questione che, sebbene non si colleghi direttamente colle superficie isoterme, vogliamo qui risolvere.

Le superficie di curvatura media costante, dello spazio ellittico o dell'europeo, ammettono due superficie parallele a curvatura assoluta  $K$  costante (teorema di Bonnet).

Indicando con  $K$  questa curvatura, si ha  $K > 1$  nel caso ellittico e  $K > 0$  nel caso euclideo; sicchè possiamo dire che una superficie  $\Sigma$  a curvatura costante  $K > 1$  dello spazio ellittico dà, con quadrature, una coppia di superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo, legate fra loro da una trasformazione di Lie-Bonnet ovvero da una trasformazione di Hazzidakis (se in particolare  $K = 2$ ) (<sup>2</sup>).

Consideriamo ora nello spazio ellittico una superficie  $\Sigma$  che sia ancora di curvatura assoluta  $K$  costante, ma con  $K < 1$ , e domandiamo se anche una tale superficie si collega a quelle di curvatura costante nello spazio euclideo. Dimostreremo che ciò accade effettivamente; ma questa volta le superficie che se ne deducono nello spazio euclideo sono pseudosferiche.

Possiamo supporre  $K > 0$ , chè altrimenti sostituiremo alla  $\Sigma$  la sua polare. Posto  $K = \sin^2\sigma$ , essendo  $\sigma$  un angolo reale costante, riferiamo la superficie  $\Sigma$  alle sue linee di curvatura  $(u, v)$ . Avremo:

$$ds^2 = \cos^2\theta du^2 + \sin^2\theta dv^2$$
$$\frac{1}{r_2} = \cos\sigma \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{1}{r_1} = -\cos\sigma \cot\theta,$$

dove  $\theta$  è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \sin^2\sigma \sin\theta \cos\theta = 0.$$

Calcolando mediante le (1) il  $ds'^2$  delle immagini di Clifford, troviamo

$$ds'^2 = dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2 = (\cos^2\theta + \cos^2\sigma \sin^2\theta) du^2 \pm 2 \cos\sigma du dv +$$
$$+ (\sin^2\theta + \cos^2\sigma \cos^2\theta) dv^2,$$

ovvero, prendendo per linee coordinate le immagini delle linee assintotiche di  $\Sigma$  e ponendo

$$\alpha = \frac{1 \pm \cos\sigma}{2}(u + v), \quad \beta = \frac{1 \mp \cos\sigma}{2}(u - v),$$

(1) *Lezioni*, vol. II, § 405.

(2) Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 352.

troviamo

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2 \cos 2\theta d\alpha d\beta + d\beta^2.$$

Ora questo è, nello spazio euclideo, l'elemento lineare sferico riferito alle immagini delle linee assintotiche di una superficie pseudosferica. Secondo che si prendono i segni superiori o gli inferiori si hanno così due superficie pseudosferiche ordinarie  $S, \bar{S}$  le quali, come subito si vede, sono legate l'una a l'altra da una trasformazione di Lie <sup>(1)</sup>. Per le formole effettive che nota  $\Sigma$ , danno  $S, \bar{S}$  con quadrature troviamo

$$x = \int (\{\pm \sin \theta X_2 + \cos \sigma \cos \theta X_1\} du + \{\pm \cos \theta X_1 \cos \sigma \sin \theta X_2\} dv),$$

e le analoghe per  $y, z$ ; i segni superiori danno la  $S$ , gli inferiori, messe  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  al posto di  $X_1, X_2$  danno la  $\bar{S}$ .

Possiamo formulare questi risultati geometricamente così:

*Le due immagini di Clifford delle linee assintotiche di una superficie  $\Sigma$  dello spazio ellittico di curvatura assoluta costante  $K > 1$ , danno le immagini sferiche delle assintotiche di due superficie pseudosferiche ordinarie  $S, \bar{S}$ , legate l'una all'altra da una trasformazione di Lie. Nota  $\Sigma$ , bastano quadrature per trovare  $S, \bar{S}$ .*

**Chimica. — Le proprietà colloidali del fluoruro di calcio.**  
Nota II <sup>(2)</sup> dei Socio E. PATERNÒ e di E. MAZZUCHELLI.

La facilità con cui, solo variando di poco la concentrazione, può farsi che un miscuglio in date proporzioni dia un precipitato di  $\text{CaF}_2$  o una soluzione colloidale, ci ha dato il modo di esaminare alcuni dei fenomeni fisici che avvengono durante la formazione delle soluzioni colloidali. Comunemente si ammette che le soluzioni colloidali abbiano un calore di precipitazione nullo, e questo non è uno degli ultimi argomenti per negare loro il carattere di vere soluzioni. Per vedere se questo fatto è di carattere universale e se ha tutta la portata che comunemente gli si attribuisce, si è studiata calorimetricamente la reazione:  $2\text{CaCl}_2 + 2\text{KFl} \rightarrow \text{CaF}_2 + 2\text{KCl} + \text{CaCl}_2$  in varie condizioni di diluizione, cioè facendo in modo che nel miscuglio definitivo si avesse un grammoatomo di fluoro in tre litri, in sei, in dodici. Nei primi due casi sa ha precipitazione quasi istantanea del fluoruro, mentre nell'ultimo la soluzione resta opalina per lungo tempo. Per confrontare si fecero determinazioni analoghe coi miscugli  $\text{Ca}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2 + \text{KFl}$  dove la precipitazione è pronta a tutte le concentrazioni.

(<sup>1</sup>) *Lezioni*, vol. II, § 391.

(<sup>2</sup>) V. p. 420.

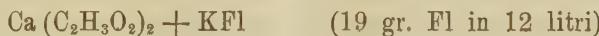
Si seguirono tutte le prescrizioni date dal Berthelot nel suo *Traité de calorimetrie chimique*: così ad esempio identificando il calore specifico delle soluzioni col loro volume specifico alla temperatura dell'ambiente; e ci siamo serviti dei pesi atomici che egli assegna ai varî elementi nel suo grande trattato di termochimica, per rendere i nostri valori direttamente confrontabili coi suoi.

Per abbreviare, riportiamo semplicemente l'aumento termometrico osservato e le grandi calorie che da esso possono calcolarsi.



$\Delta t$ dopo 20''	0°,280	Calorie sviluppate	1,680
$\Delta t$ dopo 3',20''	0°,294	" "	1,765

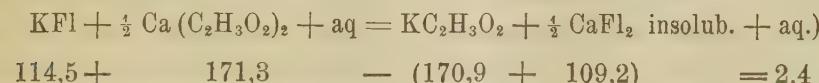
Come si vede, la reazione non sviluppa subito la massima quantità di calore, ma nei minuti successivi ha luogo un altro leggero innalzamento di temperatura; è questo un indizio che sarà meglio discusso nel caso del miscuglio  $\text{CaCl}_2 + \text{KFl}$ : si può però osservare subito che nelle reazioni dove tutti i componenti restano sciolti (es.  $\text{KOH} + \text{HCl}$ ) non si osserva niente di simile, e, per quanto riguarda la tecnica, è da avvertirsi che non si è fatta nessuna correzione pel raffreddamento durante quei tre minuti successivi, considerandolo come trascurabile: si è presa semplicemente la massima temperatura osservata.



$\Delta t$ dopo 12''	0°,147	Calorie sviluppate	1,698
$\Delta t$ dopo 2',40''	0°,164	" "	1,758

Le misure sono molto concordanti tra loro, chi consideri che nelli ordinari lavori calorimetrici il millesimo di grado è una quantità abbastanza incerta, e autorizzano a concludere che dove il  $\text{CaFl}_2$  si precipita completamente, la quantità di calore sviluppata è indipendente dalla diluizione.

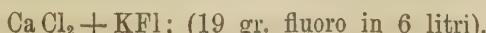
(Qui va notato che secondo i dati del Berthelot la quantità di calore sviluppabile si calcolerebbe un pò differente, cioè:



Ecco ora i risultati pel cloruro di calcio:



$\Delta t$ dopo 40''	0°,661	Calorie sviluppate	1,930
$\Delta t$ dopo 6',40''	0°,729	" "	2,134



## I.

$\Delta t$ dopo 20"	0°,269	Calorie sviluppate 1,753
$\Delta t$ dopo 8',20"	0°,361	" " 2,068

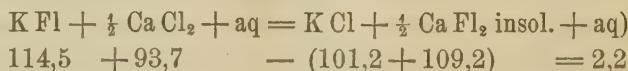
## II.

$\Delta t$ dopo 20"	0°,287	Calorie sviluppate 1,810
$\Delta t$ dopo 6',50"	0°,368	" " 2,057

$\text{Ca Cl}_2 + \text{KFl}$ ; (19 gr. fluoro in 12 litri).

$\Delta t$ dopo 15"	0°,160	Calorie sviluppate 1,782
$\Delta t$ dopo 7',15"	0°,193	" " 1,919

Da questi dati risulta evidentissimo il fatto che nella reazione non si sviluppa subito il massimo calore che essa è capace di fornire (secondo Berthelot si calcolerebbe



ma questo sviluppo si protrae per un tempo abbastanza lungo. Anche qua non si è fatta nessuna correzione pel raffreddamento, il che ha portato seco certamente un piccolo errore; ma a voler procedere con tutto rigore non basterebbe una semplice correzione empirica facile a trovarsi: occorrerebbe operare addirittura in un calorimetro Bunsen, poichè secondo ogni apparenza lo sviluppo di calore dura per un tempo superiore a questi otto o dieci minuti a cui si può applicare con sicurezza una correzione relativa a millesimi di grado (superiore non è certo). Abbiamo dunque trascurato di fare correzioni problematiche, e ciò tanto più che anche i numeri greggi sono abbastanza eloquenti per noi. La differente quantità di calore svolta sta infatti in diretta relazione colla precipitazione o meno del  $\text{Ca Fl}_2$ . Nella diluizione di tre litri esso cominciò subito a precipitare, in quella di sei il liquido era inizialmente opalino e poi precipitò, in quella di dodici il liquido era e rimase opalino: corrispondentemente lo sviluppo di calore fu sempre minore. È ovvio attribuir ciò al permanere in soluzione del  $\text{Ca Fl}_2$ , tanto più che l'aumento successivo della temperatura è maggiore appunto in quel caso (diluizione di sei litri) dove maggiore è la variazione nell'aspetto della soluzione, mentre è minore nei casi dove essa mantenne sempre l'aspetto primitivo (tre e dodici litri). L'apparente discordanza tra le esperienze I e II (diluizione di sei litri) si traduce in una concordanza ove si consideri che in ambedue i casi lo sviluppo complessivo di calore fu identico entro i limiti di precisione delle misure (che furon fatte ambedue in ambienti a 13°-14°), e che, per ciò che riguarda la differenza nelle calorie iniziali, è anche troppo

facile, in un caso come quello dove lo stato colloidale del  $\text{CaF}_2$  è così labile da distruggersi, con precipitazione, entro pochi minuti, una volta o l'altra, per un eccesso locale di  $\text{KF}$  ad es., una parte del  $\text{CaF}_2$  non assuma neppure temporaneamente questo stato.

Per maggiore conferma delle precedenti deduzioni, si è anche provato a diluire al doppio volume un miscuglio, preparato poche ore prima, di  $\text{CaCl}_2 + \text{KF}$ , alla concentrazione di 19 gr. di fluoro in 6 litri. In questa diluizione il  $\text{CaF}_2$ , come già si è accennato, mantiene il suo stato iniziale (di precipitato, in questo caso), mentre il sistema dell'i elettroliti discolti evidentemente subirà subito quel qualunque spostamento dell'equilibrio che è determinato dalla variazione della concentrazione. Se dunque il minor calore, sviluppato nella reazione alla diluizione di 12 litri in confronto a quella di 6, era dovuto al differente stato del  $\text{CaF}_2$ , non dovrà avversi, nel diluire la soluzione più concentrata, alcun effetto termico; se era dovuto a un differente equilibrio elettrolitico dovrà avversi una variazione termica che compensi il maggior calore sviluppato precedentemente, dovrà avversi cioè un raffreddamento. Si ebbe invece un riscaldamento di 0°005, corrispondente a uno sviluppo di 0,062 Calorie. Sebbene una variazione di 0°005 sia assai piccola, pure quando essa ha luogo in senso opposto a quello che si sarebbe previsto se non fossero state esatte le conclusioni precedenti, acquista un significato abbastanza eloquente.

Come conclusione di queste esperienze bisogna ammettere che nella precipitazione dei colloidì può svilupparsi calore, almeno nel caso in cui questa è accompagnata da coagulazione, ossia dal passaggio del colloidale dalla forma di idrosolo, solubile e discolto, a quella di idrogelo, insolubile. Beninteso che queste esperienze non risolvono ancora la questione se la semplice precipitazione (passaggio da idrosolo sciolto a idrosolo solido) possa anch'essa essere accompagnata da fenomeni termici. Forse no, a giudicarne dalle esperienze di Thomsen, e il calore svolto nel nostro caso sarebbe dovuto al cambiamento di stato del precipitato. Ma è già un risultato interessante aver mostrato la eccessiva restrizione delle vecchie asserzioni.

Veramente, prima di dare una importanza definitiva alle esperienze fatte, si potrebbe considerare la possibilità che nei primi momenti della mescolanza, in soluzione diluita, là dove il  $\text{CaF}_2$  non precipita, esso esista temporaneamente in una forma solubile, non come colloidale, ma, come un qualunque altro elettrolito, dissociato nelli joni  $\text{Ca}^{++}$  e  $\text{F}^-$ , e allora si comprenderebbe agevolmente come la presenza di una certa quantità di joni  $\text{F}^-$  possa rendere incompleta la reazione:



che per lo più, a causa della quasi perfetta insolubilità del  $\text{CaF}_2$ , decorre

del tutto da sinistra a destra; poi, man mano che, insolubilizzandosi il Ca Fl<sub>2</sub>, gli joni Fl si eliminassero, la reazione si compirebbe, dando luogo allo sviluppo successivo di calore. E realmente l'ammissione di una forma solubile per un fluoruro che passi ordinariamente per insolubile non ha in sè nulla d'inverosimile, ma per poterla mettere d'accordo coi fatti osservati bisognerebbe che, nelle soluzioni che restano permanentemente opaline e che hanno un calore di formazione minore delle altre, bisognerebbe dico che in queste soluzioni li joni del fluoruro di calcio restassero permanentemente, e una semplice misura di conducibilità basterebbe allora a rivelarceli.

Perciò si determinò le conducibilità elettriche del miscuglio Ca Cl<sub>2</sub> + KFl in diluizioni tali che un gr. atomo di fluoro occupasse il volume di 4, 8, 16 ecc.... 128 litri. Fu scelto questo rapporto fra i due sali perchè è tra quelli che più facilmente danno soluzioni opaline, e tutte le varie diluizioni furono preparate con un doppio metodo, cioè da una parte per diluizione metodica di miscugli preparati in soluzione più concentrata, dall'altra preparando direttamente il miscuglio da soluzioni separate, e convenientemente diluite, di Ca Cl<sub>2</sub> e KFl.

Si è visto che può giungersi così ad apparenze differentissime, e se ciò fosse dovuto, sia pure in parte, a differente jonizzazione, dovrebbe aversene una fortissima influenza sulla conducibilità.

In pratica si procedette così: preparata una soluzione  $\frac{N}{2}$  di KFl (una gr. molecola in due litri) e una  $\frac{N}{1}$  di Ca Cl<sub>2</sub> (pure una gr. molecola in due litri) se ne mescolavano volumi uguali nel bicchierino per la misura delle resistenze elettrolitiche: si facevano le osservazioni relative, e poi si diluiva secondo le potenze del due col solito sistema della coppia di pipette, avendosi così le diluizioni (riferite all'atomo di fluoro) v = 4 (iniziale), 8, 16... 128. Poi diluito al doppio, con altre pipette di maggiore capacità, il resto delle soluzioni  $\frac{N}{2}$  di KFl e  $\frac{N}{1}$  di Ca Cl<sub>2</sub> (riducendole così rispettivamente  $\frac{N}{4}$  e  $\frac{N}{2}$ ) se ne mescolavano ancora volumi uguali nel bicchierino, e si diluiva al solito, avendosi così v = 8, 16... 128. Così si continuò sino ad avere nei matracci di deposito una soluzione  $\frac{N}{64}$  di KFl e una  $\frac{N}{32}$  di Ca Cl<sub>2</sub> che mescolate insieme diedero un'ultima soluzione alla diluizione di 128 litri, con cui si chiusero le misure.

Si ebbero così i risultati riassunti nella seguente tabella, dove presso alle soluzioni iniziali e finali è notato pure l'aspetto del liquido. La temperatura di osservazione fu 25°, l'unità di misura l'ohm, secondo il manuale del Kohlrausch; la tecnica, la solita a seguirsi in simili casi; le soluzioni furono conservate in matracci paraffinati internamente.

V	I serie	II serie	III serie	IV serie	V serie	VI serie
4	210,6 si formò subito precipitato					
8	227,2 si ebbe precipitato	228,3				
16	240,6	240,8	240,0 opalescente			
32	256,1	254,1	251,3	251,2 opalescente		
64	266,3	265,0	263,7	261,9	261,0 turbido	
128	276,2 discretamente opalino	276,3 opalescente	275,4 limpido	273,4 opalescente	273,6 turbido	276,5 (?) turbido e precipita polverulento

Esaminando la tabella è facile avvedersi che i risultati non devono essere del tutto esenti da errori sperimentali: trattandosi di fare due serie separate di diluizioni con due coppie di pipette diverse, e le varie serie di misure essendo state fatte in giorni differenti, si capisce come vi si possano essere infiltrati piccoli errori, a causa dell'evaporazione, o di una diluizione non perfettamente riuscita, ecc. Ma nonostante esse hanno per lo scopo attuale una esattezza sufficiente: la concordanza quasi completa delle conducibilità per soluzioni di apparenza così diversa mostra all'evidenza che non può parlarsi affatto di  $\text{CaF}_2$  sciolto (jonizzato) in condizioni speciali di preparazione: il  $\text{CaF}_2$  che non precipita in certi casi deve considerarsi sempre allo stato colloidale. Una piccola parte, veramente, deve pure essere sciolta effettivamente in corrispondenza della solubilità propria del  $\text{CaF}_2$ , e per questa, si può ragionevolmente porsi la questione se essa solubilità (minima, del resto) non sia un po' maggiore in presenza del  $\text{CaF}_2$  colloidale che del  $\text{CaF}_2$  idrogelo. Probabilmente sì, poichè si sa che la solubilità cresce collo stato di suddivisione delle sostanze solide, e certo la tenuità di un corpo in soluzione colloidale è infinitamente maggiore che per lo stesso allo stato di precipitato (¹).

E a questo proposito vogliamo notare che esaminando la tabella si vede appunto che fra le soluzioni a 128 litri di diluizione quelle preparate diluendo le più concentrate, dove il  $\text{CaF}_2$  è parzialmente allo stato di idrosolo, hanno conducibilità un po' maggiore che le altre preparate da liquidi diluiti, nei quali è mancata l'azione peptizzante del  $\text{CaF}_2$ . Ma ciò deriva forse da piccoli errori di diluizione (che per la natura del processo seguito, anche se fatti una sol volta influenzano con peso crescente tutte le diluizioni successive) e non vi diamo molto peso. Riteniamo che per porre sicura-

(¹) Forse in questa esaltata solubilità sta la ragione per cui i corpi dotati di mediocre insolubilità non possono dare, o male, soluzioni colloidali stabili (v. a p. 426). Può darsi che in tale stato di estrema suddivisione passino addirittura in soluzione, e' da questa si riseparino non più nella forma metastabile di colloidale, ma in quella stabile di precipitato.

mente in chiaro questo, teoricamente prevedibile, aumento di solubilità, occorrebbero misure di un grado di precisione assai superiore alle ordinarie.

Discussa così e dimostrata la esistenza del fluoruro di calcio colloidale in tutte le soluzioni (dializzate o no) da cui esso non precipita, resta a dire di alcune sue singolarità. È noto che in generale i colloidì danno soluzioni perfettamente limpide, come i cristalloidi, e occorre ricorrere a speciali indagini ottiche (azione sulla luce polarizzata) per riconoscere la loro natura di sospensioni tenuissime. Pel  $\text{CaF}_2$ , invece non ce n'è stato neanche bisogno perchè le soluzioni appariscono leggermente turbide anche a occhio nudo. Per rendersi ragione di questa irregolarità occorre ricordare che un intorbidamento permanente non è del tutto incompatibile collo stato colloidale: basta citare l'argilla colloidale, scoperta dallo Schlösing, che dà con acqua pseudosoluzioni perpetuamente opalescenti, ma senza tendenza alcuna al sedimentare, neppure dopo molti anni. Nel nostro caso, una spiegazione si ha ricorrendo alla natura di sospensioni infinitamente tenui che si attribuisce alle cosiddette soluzioni colloidali. Si è veduto come, variando la quantità del peptizzante (cioè dei sali di calcio ad acido forte) si ottengono sospensioni più o meno turbide, o solo opaline, con tendenza maggiore o minore al sedimentare: se realmente l'azione peptizzante consiste in una disgregazione, in una suddivisione sempre più spinta del corpo solido si comprende come, coll'aumentare di questa azione, cresca sempre lo stato di divisione, la tenuità del fluoruro di calcio, ma non c'è nessuna ragione assoluta per cui questa tenuità debba spingersi sino al punto da rendere addirittura insensibile la presenza nel liquido di un corpo in esso sospeso: essa può benissimo anche al suo valore massimo (che, come si è visto, è determinato dal sorgere dell'azione antagonista coagulante in soluzioni concentrate) restar tale da dar sempre una leggera opalescenza. Già Linder e Pikton, studiando il solfuro di arsenico colloidale, hanno mostrato come esso possa presentarsi in diversi gradi di tenuità, e di soluzione sempre più completa, cominciando dai liquidi in cui sono ancora visibili al microscopio i granuli gialli di  $\text{As}_2\text{S}_3$ , sino a quelli dove l' $\text{As}_2\text{S}_3$  è già capace di dializzare a traverso le membrane. Il caso di  $\text{CaF}_2$  può bene paragonarsi a questo, ed è anzi ancora più bello e dimostrativo, perchè qua col solo variare la concentrazione dell'agente peptizzante possono realizzarsi per passaggio continuo tutti i gradi di suddivisione del colloide.

Sebbene il nostro lavoro abbia avuto principio da una difficoltà di analisi, non ci siamo però occupati di proposito della determinazione analitica del  $\text{CaF}_2$ , perchè essa già è stata studiata esaurientemente da quel valentissimo sperimentatore che fu Enrico Rose. Ma ci piace però fare notare che tutte le osservazioni e prescrizioni del Rose trovano la loro spiegazione naturale nelle proprietà colloidali del  $\text{CaF}_2$ , da noi messe in chiaro. In primo luogo poniamo la facilità con cui esso dà sospensioni, poichè infatti la sua

precipitazione ha luogo per lo più in soluzioni relativamente concentrate e con eccesso di  $\text{CaCl}_2$ , che è un peptizzante. Secondariamente, la convenienza di precipitare contemporaneamente una parte o tutto il resto del  $\text{CaCl}_2$  con carbonato sodico, ottenendosi così un triplo vantaggio: primo, di trascinare giù col  $\text{CaCO}_3$  il fluoruro di calcio, mediante quelle azioni di assorbimento superficiale cui i colloidì vanno così facilmente soggetti, e che anzi, a ragione o a torto, sono state perfino proposte (dal Vanino col  $\text{BaSO}_4$ ) per riconoscere la natura colloide di una soluzione; secondo, di eliminare gran parte o tutto il peptizzante: terzo, di introdurre nel liquido un precipitante, come il  $\text{Na}^2\text{CO}_3$ . Nulla abbiamo da dire sulla influenza nociva dei sali ammoniacali, la quale riguarda la solubilità vera e propria, ionica, se così è lecito dire, del  $\text{CaFl}_2$ , e non le sue tendenze colloidali.

Peraltro dalle nostre ricerche risulta, come fatto nuovo e interessante per la chimica analitica, il vantaggio di operare la precipitazione in soluzione diluitissima e senza grande eccesso di  $\text{CaCl}_2$ , poichè allora il  $\text{CaFl}_2$  non subisce che poca o punta azione peptizzante, e anche senza la presenza di  $\text{CaCO}_3$  può comodamente lavarsi per decantazione come il fluoruro di bario. In pratica però è necessario studiare le perdite che può causare la solubilità del  $\text{CaFl}_2$  (una grammomolecola, 80 gr., secondo Kohlrausch e Rose si scioglie in 500 litri di acqua a 18°) e se vi si può riparare con una correzione empirica, o concentrando le acque madri.

Terminiamo con alcune considerazioni generiche sui colloidì. Recentemente Arthur Müller ha esposto sull'argomento idee giuste, mostrando come ormai non è più lecito parlare dei colloidì come di una sola categoria di sostanze, ma che occorre almeno distinguere i casi in cui si tratta di una sospensione tenuissima (metalli nobili, sulfuri colloidali e, aggiungiamo, il  $\text{CaFl}_2$ ) da quelli in cui si ha che fare con un acido o una base debolissimi, a molecola estremamente complessa, salificati e tenuti in soluzione da tracce di base o di acido energico (il più degli idrossidi inorganici). La distinzione è giusta, e vi ci associamo, ma il Müller ha dimenticato un altro carattere essenziale, e che pure è stato posto in chiaro molti anni fa per la prima volta da uno di noi. Ed è che mentre i colloidì inorganici sembrano poter dare, se opportunamente trattati, soluzioni dello stesso genere anche nei liquidi organici più disparati (così l'acido silicico nell'alcool etilico, nella glicerina, nell'etere etilico, nel sulfuro di carbonio; noi stessi abbiamo osservato che il  $\text{CaFl}_2$  resta in soluzione anche in presenza di un forte eccesso di alcool metilico o etilico, di acetone, di fenolo); invece pei colloidì organici la loro esistenza è strettamente legata colla natura del solvente: il tannino è colloide nell'acqua, e ha peso molecolare semplice nell'acido acetico (<sup>1</sup>). Nel caso di molti

(<sup>1</sup>) Gazz. chim. ital., 1889, 684.

colloidi inorganici si tratta evidentemente di sospensione tenuissima, qua si tratta di polimerizzazione; a parer nostro tra la natura delle soluzioni colloidì organiche e le inorganiche esiste, in linea generale, tanta differenza quanta tra la chimica dei composti del carbonio e quella degli altri elementi, sebbene là come qua possano benissimo trovarsi dei termini di passaggio.

**Chimica. — Nuovo processo di sterilizzazione delle acque potabili.** Memoria del Socio E. PATERNÒ e di M. CINGOLANI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

**Chimica. — Azioni chimiche della luce.** Nota VI del Socio G. CIAMICIAN e di P. SILBER.

Già da qualche tempo ci stiamo occupando delle alterazioni che la luce determina nei composti non saturi, cioè contenenti un doppio legame, e nella presente Nota descriveremo brevemente i risultati fin'ora ottenuti. In questo campo di studi la letteratura possiede già un ragguardevole numero di osservazioni, che si riferiscono al diverso modo in cui la luce agisce sopra questi corpi. Anzi tutto è stato trovato che in moltissimi casi essa determina un fenomeno di polimerizzazione ed in proposito vanno citate le belle esperienze del Liebermann sul timochinone <sup>(1)</sup>, che si trasforma in politimochinone e quella di I. Bertram e R. Kürsten <sup>(2)</sup> sulla polimerizzazione alla luce dell'acido cinnamico. In questo caso, come assieme a noi ebbe a confermare anche Riiber <sup>(3)</sup>, si produce l'acido trussillico di Liebermann. Oltre ai fenomeni di polimerizzazione, la luce determina alle volte anche il passaggio di un'isomero stereochimico nell'altro: l'acido allocinnamico diventa cinnamico; l'allofurfurico, furfurico; l'allocinnamildenacetico, cinnamildenacetico <sup>(4)</sup>. Così pure l'acido angelico si trasforma in tiglico ed il maleico in fumarico <sup>(5)</sup>. Queste reazioni vengono singolarmente agevolate della presenza di tracce di jodio. Infine agendo sui composti non saturi in presenza di ossigeno, la luce favorisce anche processi di auto-ossidazione e qui sono da citarsi vari lavori,

<sup>(1)</sup> Berichte, 10, 2177 (1877), e 18, 3193 (1885).

<sup>(2)</sup> Berichte, 28, IV, 387 (1895).

<sup>(3)</sup> Berichte, 35, 2908 e 4128 (1903).

<sup>(4)</sup> Berichte, 28, 1443 (1895).

<sup>(5)</sup> Berichte, 29, 1080 (1896). Referate.

massime di Engler (¹), ma anche quelli di Thiele (²), Roser (³) e finalmente di Weger (⁴).

*Acido cinnamico.* — Come s' è accennato, I. Bertram ed R. Kürsten trovarono che la luce determina la trasformazione dell'acido cinnamico in un polimero che giustamente supposero essere il trussillico di Liebermann. Noi possiamo confermare questa supposizione ed aggiungere che assai probabilmente il passaggio non ha luogo che esponendo alla luce l'acido cinnamico solido, mentre in soluzione questo effetto non si compie. Contemporaneamente a noi Riiber ottenne e descrisse la trasformazione dell'acido cinnamico in  $\alpha$ -trussillico per diretta insolazione del primo allo stato solido e secco.

Esponendo una soluzione di acido cinnamico (10 gr.) in alcool assoluto (45 c. c.) al sole dal giugno all'ottobre, si forma in parte l'etere etilico, ma il resto, circa la metà, rimane inalterato e non ci fu possibile di ottenere neanche tracce d'acido trussillico. Similmente si contiene l'acido cinnamico in soluzione di etere e di acetone; in questi casi si riebbe tutto intero l'acido inalterato.

Altrimenti avviene invece, se la sostanza non sia tutta disciolta, ma in parte sospesa nel liquido: la porzione rimasta indisciolta subisce la trasformazione. Esponendo al sole dal maggio all'ottobre 4 gr. d'acido cinnamico in una quantità di paraldeide insufficiente a discioglierlo completamente, si ritrovò nella soluzione l'acido cinnamico inalterato, mentre la parte solida s' era completamente trasformata in acido  $\alpha$ -trussillico.

*Stilbene.* — A differenza dell'acido cinnamico, lo stilbene si polimerizza in soluzione. Noi abbiamo esposto al sole 3 gr. di stilbene in 15 c. c. di benzolo, dall'ottobre al giugno. Il liquido per effetto dell'insolazione diviene gialliccio, svaporando a b. m. si ha un residuo solido, che cristallizza dall'etere in prismetti senza colore. Essi fondono a 163° e sono in genere difficilmente solubili negli ordinari solventi. Il composto, che non era stato descritto, ha la composizione dello stilbene, ma la doppia formola:



È dunque un bimero dello stilbene e l'attacco delle due molecole sarà certamente dovuto al doppio legame olefinico; in soluzione alcoolica resiste al permanganato potassico.

A proposito dello stilbene dobbiamo accennare qui ad un'esperienza, che s' è compiuta si può dire contro la nostra volontà, per puro caso. Per vedere se

(¹) Berichte, 30, 1669 (1897); 31, 3046, 3055 (1898); 33, 1090, 1097, 1109 (1900); 34, 2933 (1901); 36, 2642 (1903).

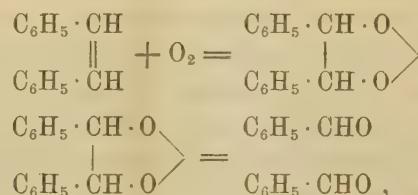
(²) Berichte, 33, 666 (1900).

(³) Liebigs Annalen der Chemie, 247, 160.

(⁴) Berichte, 36, 309 (1903).

lo stilbene si polimerizzasse allo stato solido meglio che in soluzione, ne abbiamo lasciato esposto alla luce 5 gr. finamente polverizzati, in una capsula fondo piatto, posta in un essiccatore. Durante i mesi d'inverno e di primavera il prodotto rimase inalterato d'aspetto, diventando solamente alquanto gialliccio, ma dopo il periodo estivo, in autunno, trovammo che la sostanza nella capsula s'era trasformata in una massa quasi nera e che le pareti dell'essiccatore e massime quelle più direttamente colpite dalle radiazioni, s'erano ricoperte d'uno strato di lunghi aghi. Esaminando il prodotto si trovò che la materia cristallina sulle pareti non era altro che acido benzoico e che nella capsula predominava ancora lo stilbene inalterato. Però oltre a queste sostanze cristalline, tanto la materia delle pareti che quella rimasta nella capsula conteneva una sostanza amorfa, resinosa, insolubile nell'etere.

In seguito alle ricerche, già citate dell'Engler, la cosa si spiega facilmente: siccome l'essiccatore non chiudeva perfettamente, lo stilbene s'è ossidato producendo forse da prima un perossido e poi scindendosi in due molecole d'aldeide benzoica:



la quale a sua volta in parte s'è resinificata per azione della luce, ed in parte ha continuato ad ossidarsi in acido benzoico.

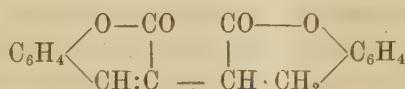
Noi non intendiamo occuparci più direttamente della cosa per non intralciare le belle ricerche dell'Engler e ci limitiamo però ad esporre il fatto, che crediamo non sia stato ancora descritto.

*Cumarina.* — La cumarina si trasforma per azione della luce tanto allo stato solido che in soluzione in un polimero, che assai probabilmente è identico alla cosiddetta *idroodicumarina* di Dyson (<sup>1</sup>). La prima esperienza venne fatta in soluzione alcoolica lasciandola esposta al sole per quasi un'intera annata dal dicembre all'ottobre. Il liquido conteneva 10 gr. di cumarina in 120 c. c. d'alcool assoluto. Già dopo qualche settimana incominciano a deporsi dei cristallini bene sviluppati, la di cui quantità va lentamente aumentando. Alla fine dell'insolazione se ne raccolsero 1, 1 gr.; come si vede la trasformazione è assai incompleta. Il prodotto venne fatto cristallizzare dell'acido acetico glaciale. Esso fonde a 262° ed ha la composizione della cumarina. Per la sua

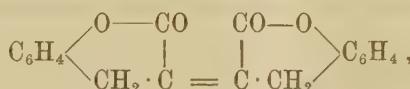
(1) Beilstein II, 2026, e Chem. Centralblatt 1890, I, 525.

piccola solubilità in tutti gli ordinari solventi non s' è potuto determinarne il peso molecolare. Non v'ha però alcun dubbio che gli spetti la doppia formula  $C_{18}H_{12}O_4$ .

Come s' è detto, qualche tempo fa Dyson ottenne per idrogenazione del prodotto, che si forma condensando l'aldeide salicilica coll'acido succinico, una sostanza, che chiama idrodicumarina, e che è assai probabilmente identica alla nostra. Egli le attribuisce la formola:



che però sarebbe da sostituirsi con la seguente:



ove non si voglia ammettere la presenza di un'anello tetrametilenico nella cumarina polimerizzata. Dyson osservò per la sua sostanza il punto di fusione  $256^\circ$ , ma la piccola differenza non esclude certo l'identità dei due prodotti.

La polimerizzazione della cumarina avviene oltre che in soluzione alcoolica, anche in paraldeide ed in benzolo. Essa ha luogo, come s' è detto, anche esponendo al sole la sostanza solida.

*Acido maleico.* — L'acido maleico è una di quelle sostanze che alla luce non si polimerizzano, ma si trasformano nell'isomero più stabile. Questa metamorfosi è stata osservata da J. Wislicenus (<sup>1</sup>) operando in presenza di bromo o di jodio. Noi abbiamo trovato che, sebbene assai lentamente, la trasformazione dell'acido maleico in fumarico si compie anche senza la presenza di un catalizzatore e tanto dall'acido maleico allo stato solido, che dalla sua soluzione acquosa. In quest'ultime condizioni, con un'esposizione di quasi un anno, la quantità d'acido fumarico ottenuta ascese al 12,5 p.cto. dell'acido maleico impiegato.

*Ossime delle nitrobenzaldeidi.* — In seguito alla nostra esperienza sull'azione della luce sopra l'aldeide o-nitrobenzoica, il dott. F. Sachs (<sup>2</sup>) osservò che la o-nitrobenzilidenanilina, si trasforma alla luce nella o-nitrobenzanilide:



(<sup>1</sup>) Berichte, 29, Referate 1080 e Abhandlungen der K. Sächsischen Akademie, (1895), 489.

(<sup>2</sup>) Berichte, 35, 2704.

Era però possibile che l'ossima dell'o-nitrobenzaldeide, subisse un'analoga metamorfosi, dando p. es. l'acido o-nitrosobenzidrossamico



La luce determina invece tutt'altra reazione in cui il gruppo nitrico non ha alcuna parte; avviene soltanto una isomerizzazione in modo che la forma dal punto di fusione minore, e però meno stabile, passa a quella a più alto punto di fusione, che è la più stabile. La cosiddetta antialdossima diventa sinaldossima. Siccome in questa metamorfosi il gruppo nitrico non è in nessun modo direttamente interessato, così la reazione si compie ugualmente con tutti e tre gli isomeri e può essere raffigurata dal seguente schema:



Come si vede, essa corrisponde perfettamente alle trasformazioni dell'acido maleico in fumarico, dell'acido angelico in tiglico, dell'allocinnamico in cinnamico ecc. e cioè in genere della forma maleica in quella fumarica. Questi fatti presentano un certo interesse perchè sono una elegante conferma della teoria stereochimica per le isomerie delle ossime: apparisce evidente che questa isomeria non può essere di struttura, ma come quella degli acidi maleico e fumarico deve essere d'altra indole e però di configurazione.

Noi abbiamo parecchie altre esperienze in corso sul contegno delle ossime alla luce e speriamo di poter fra breve fare un'ulteriore comunicazione in proposito.

*O-nitrobenzaldossima.* — Venne preparata dell'o-nitrobenzaldeide seguendo le norme date dal Gabriel (<sup>1</sup>) ed ottenuta in cristalli giallicci dal punto di fusione 102°-103°. Goldschmidt e Rietschoten danno il punto di fusione 96-97°; 5 gr. di questo prodotto, in 100 c. c. di benzolo, rimasero esposti alla luce dal 27 marzo al 16 aprile. Già dopo due giorni la parte che era rimasta indisciolta passa in soluzione e dal liquido giallo si vanno a poco a poco separando degli aghetti ramificati di colore bruno accompagnati da piccole quantità di una materia polverulenta amorfa. Ad insolazione finita la parte solida (3, 8 gr.) venne separata dalla soluzione e purificata dal benzolo, avendo cura di non indulgarsi troppo in questa operazione per evitare che il prodotto non avesse ad alterarsi per una prolungata ebollizione.

(<sup>1</sup>) Berichte, 16, 520.

Si ebbero così fogliette cristalline lunghe e sottili, che fondevano a 148-150° ed avevano la composizione della sostanza primitiva, in cui possono essere trasformate per una prolungata ebollizione in soluzione benzolica. Il composto è evidentemente la cosiddetta o-nitrobenzosinaldossima di Goldschmidt e Rietschoten<sup>(1)</sup>, che l'ottennero dall'antiossima col metodo di Beckmann. Questi autori trovarono per il loro prodotto il punto di fusione 136°, ma la differenza non può infirmare l'identità delle due sostanze. Col metodo del Beckmann si ottiene solamente una parziale trasformazione dell'antiossima nella sinaldossima; nel nostro caso invece il prodotto separatosi alla luce dalla soluzione benzolica è evidentemente più puro.

*P-nitrobenzaldossima.* — Si ottenne seguendo il Gabriel<sup>(2)</sup> dalla p-nitrobenzaldeide in aghi giallicci, che fondevano a 130°; gli autori danno come punto di fusione 128,5-129°. Il tubo esposto alla luce dal 28 aprile al 1 maggio, conteneva 2 gr. dell'ossima e 40 c.<sup>3</sup> di benzolo. Già dopo poche ore, dalla soluzione va separandosi una polvere cristallina la quale cresce in quantità, mentre gli aghi del composto primitivo, rimasti indisciolti, a poco a poco scompariscono. Alla fine si filtra il prodotto; la materia cristallina, leggermente colorita in giallo, fonde a 168° e purificata dall'etere petrolico si presenta in tavolette, sempre colorate lievemente in giallo, che fondono a 174°. Rifuse, fondono nuovamente a 128°.

Il prodotto, che ha la stessa composizione della sostanza primitiva, corrisponde per tutte le sue proprietà alla p-nitrosinbenzaldossima, descritta da Goldschmidt e Kjellin<sup>(3)</sup>, per cui Behrend e König<sup>(4)</sup> trovarono il punto di fusione 173-175°. Anche in questo caso dunque ed anzi con maggiore rapidità che per l'ortoiossima, la luce determina il passaggio della forma maleica a quella fumarica.

*M-nitrobenzaldossima.* — Il prodotto venne preparato seguendo sempre le indicazioni di Gabriel<sup>(5)</sup>, cristallizzato dall'acqua fondeva a 121°; nella letteratura il punto di fusione è quello di 118°. Per istudiare l'azione della luce, vennero esposti al sole, dal 28 aprile al 27 maggio, 2, 5 gr. dall'ossima in 20 c. c. di benzolo; in queste condizioni la metà della sostanza rimase indisciolta. Durante l'insolazione la parte solida non cambia per nulla il suo aspetto e dal liquido si separano soltanto dei fiocchetti di sostanza amorfa e bruna. Esaminando i prodotti, si trovò che la parte rimasta indisciolta fonde a 119°, e la sostanza ottenuta per svaporamento dal benzolo a 118°. L'ossima impiegata nell'esperienza non aveva subito alcuna alterazione.

(1) Berichte, 26, 2101.

(2) Beilstein III, vol. 49.

(3) Berichte, 24, 2550.

(4) Liebigs Annalen der Chemie, 263, 350.

(5) Beilstein, vol. III, 47.

In questo caso la luce dunque non avrebbe prodotto nessun effetto, ma questo fatto apparendoci strano abbiamo voluto approfondirlo ulteriormente. Le due ossime della m-nitrobenzaldeide avrebbero, secondo Goldschmidt<sup>(1)</sup>, punti di fusione assai prossimi; l'ossima ottenuta direttamente dall'aldeide fonderebbe a 118-119° e quella trasformata col metodo del Beckmann a 116-118°. Noi abbiamo operato, sull'ossima da noi preparata dall'aldeide e fondente a 120°, la trasformazione di Beckmann ed a questo scopo 5 gr. della sostanza, sciolta in 150 c.c. d'etere assoluto, vennero trattati con acido cloridrico gasoso. I cristalli del cloridrato che si separarono, lavati con etere, furono sospesi nello stesso solvente ed agitati con una soluzione di carbonato sodico. La soluzione eterea svaporata a blando calore, lasciò un residuo cristallino, che, seccato nel vuoto, venne fatto cristallizzare rapidamente dal benzolo. Si ebbero, così facendo, dei cristalli che fondevano a 95°-100°.

Ora questa sostanza (gr. 2) sospesa in benzolo (30 c.c.) ed esposta alla luce dall'11 al 26 maggio, dette un prodotto che fondeva 118°-119°.

In base a questo risultato noi crediamo che le cose stieno così; l'ossima più stabile dell'aldeide m-nitrobenzoica, la forma fumaroide, dunque la sinaldossima, è quella che fonde a 118-119°, oppure a 121°, secondo il suo grado di purezza; essa è inalterabile alla luce. Col metodo di Beckmann essa si trasforma in parte nella forma malenoide, nell'antiossima, che in questo caso è assai instabile e non potè fin'ora essere ottenuta che mescolata all'altra. Il nostro prodotto, che fondeva a 95-100°, ne conteneva evidentemente di più di quello avuto dal Goldschmidt. Questa antiossima si trasforma alla luce nella sinaldossima come negli altri due casi da noi studiati. L'ossima della m-nitrobenzaldeide che fonde a 121°, sarebbe dunque la forma fumaroide ossia la sinaldossima e non l'altro isomero come venne finora ammesso dagli autori<sup>(2)</sup>.

Questa interpretazione dei fatti non può però ancora essere considerata come definitiva, e per risolvere la questione sono necessarie ulteriori esperienze fatte non solamente sulle aldossime m-nitrobenzoiche, ma anche sui loro eteri e derivati carbanilici.

(<sup>1</sup>) Berichte, 23, 2170

(<sup>2</sup>) Beilstein, vol. III, p. 47 e 48.

Fisiologia. — *La pausa dei movimenti respiratori nell'asfissia.*  
Nota del Socio ANGELO MOSSO.

Le cellule nervose nel cervello, nel midollo allungato e nel midollo spinale reagiscono in modo diverso alla mancanza dell'ossigeno. Ho dovuto occuparmi di questo studio nell'esaminare l'azione dell'aria rarefatta sull'organismo: ora comunico le indagini preliminari che feci sull'asfissia.

Quando si chiude la trachea ad un animale dopo un breve periodo di eccitazione, esso perde la coscienza e cade a terra. Nei porcellini questo periodo dura circa 20 secondi dal momento in cui si è chiusa la trachea: caduto l'animale sta disteso sopra un fianco e fa delle inspirazioni profonde. La morte viene in un tempo più o meno lungo; e varia non solo fra le differenti specie di animali, ma anche fra individui della medesima specie. Non mi fermerò su questo argomento che fu studiato da Tamassia, da Ch. Richet (<sup>1</sup>), da Simone Fredericq e da molti altri.

Fatte poche eccezioni, i cani resistono 6 minuti ed i conigli solo 3, dal momento nel quale si chiude la trachea, a quello nel quale non si sente più il cuore a battere. Questo è però un tempo difficile a determinarsi ed incerto, perchè anche quando è scomparso il polso nelle arterie, può ancora richiamarsi in vita l'animale, facendo la respirazione col soffietto, se il cuore non ha cessato completamente di contrarsi.

L'arresto del respiro è più facile determinarlo. Per dare un esempio dirò che su quattro porcellini sacrificati a questo scopo, i movimenti del respiro cessarono dopo 2' e 15" con poca differenza l'uno dall'altro.

Nell'asfissia (in qualunque modo si produca, o colla respirazione di un gas inerte, o colla emorragia, o semplicemente colla chiusura della trachea) dopo un periodo di eccitazione nel quale gli animali fanno dei movimenti respiratori profondi, succede un arresto del respiro che può durare un minuto o due, ed anche più nel cane; e dopo viene una serie variabile di movimenti respiratori successivamente digradanti.

Falk (<sup>2</sup>) fu il primo, per quanto io sappia, che descrisse questa pausa ed egli l'attribuì alla paralisi del centro respiratorio. Vediamo prima con un tracciato il fenomeno che studierò in questa Nota.

(<sup>1</sup>) La letteratura trovasi nel *Dictionnaire de Physiologie* Tom. I, in un articolo scritto dal Richet stesso.

(<sup>2</sup>) Falk, *Ueber den Tod im Wasser*. Archiv. f. path. Anatomie und Physiologie, 47 vol., 1869, p. 48.

Ad un porcellino di 500 grammi si chiude la trachea con una pinzetta; l'animale fa alcune inspirazioni profonde, e poi cade sopra un fianco; gli applichiamo subito sul torace un timpano a bottone messo con un tubo di gomma in comunicazione con un timpano registratore. Sotto è scritto il tempo ogni 2 secondi.

Il tracciato comincia 36 secondi dopo la chiusura della trachea: sono scritte 3 o 4 respirazioni, e poi vediamo che cessa il respiro da *A* in *B*. Vi è una pausa di 40" e dopo l'animale fa una inspirazione profonda, nella quale

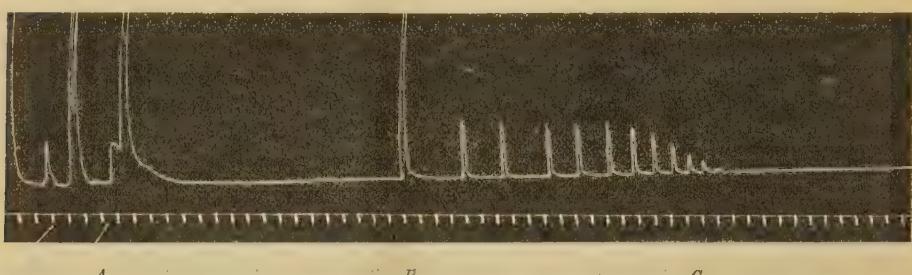


FIG. 1. -- Porcellino d'India. Da *A* in *B* pausa del respiro prodotta dall'asfissia. Da *B* in *C* respirazioni finali. Il tempo è scritto ogni 2 secondi.

muove anche le estremità posteriori; a questa succedono 10 respirazioni da *B* in *C*, alle quali si associa un boccheggiamento; dopo *C* il cuore batte ancora, ma l'animale non respira più.

Riferisco un'esperienza che feci coll'idrogeno sopra un cane per eliminare l'azione dell'anidride carbonica nell'asfissia. Da un gasometro passava una corrente di idrogeno nella trachea dell'animale, ed essendo la cannula tracheale fatta con tubo a T, l'idrogeno usciva dal ramo libero per mezzo di un tubo di gomma al quale erasi unito un imbuto capovolto sopra un piatto pieno di acqua dello spessore di mezzo centimetro. Il cane poteva liberamente respirare l'idrogeno che usciva dal gasometro e passava nell'imbuto chiuso per mezzo dell'acqua. Per evitare le convulsioni ed i moti del respiro troppo forti, iniettammo a questo cane del peso di 12 chilogr. un grammo di cloralio nella vena jugulare, (fig. 2). La linea superiore fu scritta dal torace, l'inferiore dall'addome. Il tempo è segnato ogni 2 secondi.

Nel punto indicato  $\alpha \downarrow$  l'animale comincia a respirare l'idrogeno.

Dopo circa 40 secondi è divenuta più forte l'espirazione attiva e cresce la tonicità dei muscoli, del torace e del diaframma. Sebbene per mezzo del cloralio siano soppressi i moti convulsivi, noi vediamo bene il periodo della dispnea, il quale si manifesta con un aumento dei moti respiratori, al quale succede una diminuzione e la paralisi.

Trascorsi cento secondi circa, dalla chiusura della trachea, è cessato il periodo di eccitazione, e scema la tonicità dei muscoli respiratori, così che

la posizione di riposo del torace e del diaframma scende sotto il normale. I moti del respiro vanno rallentandosi e dopo vi è una pausa di quasi 2 minuti: dopo la quale succedono sei movimenti inspiratori.

Nelle varie forme di asfissia è diverso il modo col quale cessa il respiro prima della pausa. Riferisco due esperienze fatte sopra di una scimmia dalle quali risulta, come il fattore preponderante nell'asfissia, dobbiamo ritenere sia la mancanza dell'ossigeno e non l'accumularsi dell'anidride carbonica, come del resto era noto.

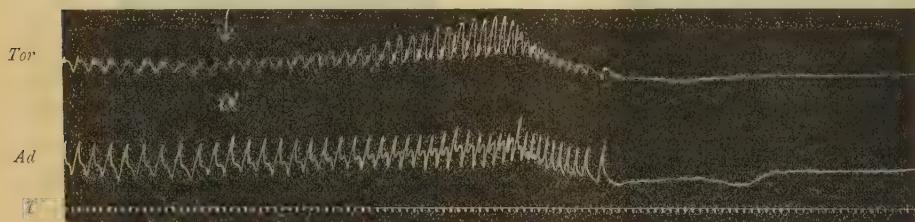


FIG. 2. — Asfissia prodotta facendo respirare l'idrogeno ad un cane nel punto ↓α. La linea superiore *Tor* fu scritta dal torace, la linea inferiore *Ad* segna i movimenti dell'addome. La pausa del respiro prodotta dall'asfissia dura quasi 2 minuti. Il tempo è segnato ogni due secondi. Il tracciato fu ridotto a metà grandezza.

È una scimmia femmina del peso di 1470 gr. che era stata sulla punta del Monte Rosa nell'agosto passato. Il 3 novembre, (dopo che aveva servito ad una determinazione di alcalinità del sangue fatta alcuni giorni prima) vedendo che stava poco bene, ci decidiamo a sacrificiarla per queste esperienze.



FIG. 2. — Continuazione del tracciato precedente nel quale si vedono le respirazioni finali dopo la pausa prodotta dall'asfissia coll' idrogeno. Riduzione a metà grandezza.

Le iniettiamo mezzo grammo di cloralio nell'addome per renderla insensibile: subito cade in profondo sonno ed essendo cessato il respiro dobbiamo incominciare la respirazione artificiale. La mettiamo in una bacinella con dell'acqua calda a 37° e poco per volta rinviene.

Facciamo due esperienze sull'asfissia colla chiusura semplice della trachea e due colla respirazione per mezzo dell'idrogeno. Tali esperienze erano interrotte quando cessava il respiro e si faceva la respirazione artificiale perchè l'animale non morisse.

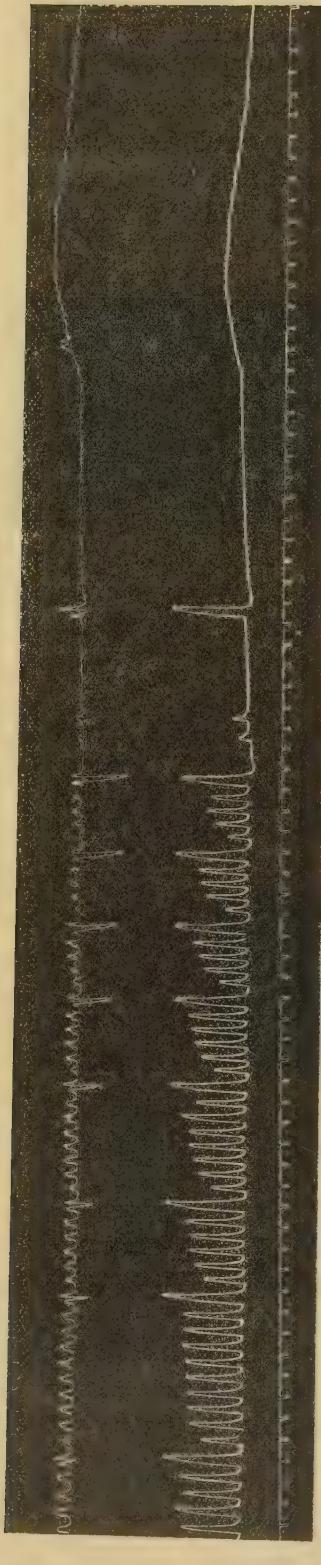


FIG. 3. — Scimmia elorallizzata per renderla insensibile. Quinta esperienza fatta chiudendo la trachea fino a che si producesse l'arresto del respiro. La trachea venne chiusa 40 secondi prima che cominci il tracceato. A destra cessato il respiro si vede la reazione della tonicità nei muscoli respiratori.

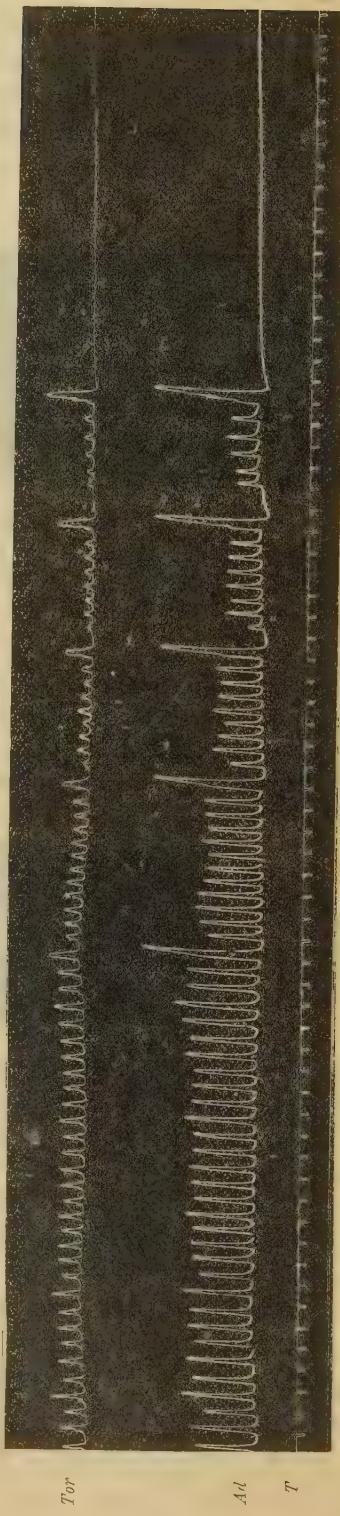


FIG. 4. — Scimmia. Ultima e sesta esperienza fatta dopo la precedente. L'assissa si produce per mezzo della respirazione fatta col'idrogeno che si amministra nel principio del tracceato.

La fig. 3 rappresenta la 5<sup>a</sup> esperienza: essa è fatta chiudendo la trachea per mezzo di una vescichetta di gomma che con un tubo si innesta nella trachea. Adottai questo metodo di chiusura per non mettere un'ostacolo meccanico alla funzione dei muscoli inspiratori. Tale chiusura successe 40 secondi prima del tracciato che riproduco.

In alto è scritto il moto toracico e sotto quello dell'addome per mezzo di due timpani a bottone. La scimmia che prima aveva il respiro uniforme ed uguale, presenta di quando in quando delle inspirazioni diaframmatiche più forti, alle quali corrisponde un leggero moto delle braccia che si trasmette alla penna del torace. Questi periodi vanno raccorciandosi ed in ultimo abbracciano solo cinque inspirazioni, poi si ferma, fa ancora due deboli inspirazioni, poi una più forte e quindi resta 22 secondi immobile, dopo il qual tempo comincia la reazione di tonicità (<sup>1</sup>). Finito questo tracciato facciamo la respirazione artificiale.

Quando l'animale fu completamente rimesso e respirava spontaneamente colla forza di prima, si fa un'ultima e sesta esperienza per mezzo dell'asfissia coll'idrogeno. In principio del tracciato 4 comincia a respirare l'idrogeno: i fenomeni che si presentano sono gli stessi come nell'asfissia quando l'anidride carbonica non può venir eliminata dall'organismo. Ma non succede più la reazione della tonicità e mancano le respirazioni finali.

Gli animali profondamente narcotizzati, dopo ripetute esperienze fatte coll'asfissia, possono morire senza che comparisca la reazione della tonicità e senza che succedano le respirazioni finali.

Durante la pausa del respiro non è più possibile coll'eccitazione dei nervi sensibili di ottenere dei movimenti riflessi: questo dimostra che è sospesa insieme al respiro anche la sensibilità delle cellule nervose midollari che presiedono ai riflessi. Per conoscere la gerarchia delle cellule nervose nel midollo allungato, e il loro modo di comportarsi nell'asfissia, scrissi la pressione del sangue nella carotide per mezzo di un manometro a mercurio e non trovai alcuna relazione fra il centro inibitore cardiaco ed il centro vasomotorio col fenomeno della pausa.

La pausa del respiro è un fenomeno che si riferisce più alla forza che non al ritmo del respiro. Infatti nel tracciato dell'addome e anche nel torace (sebbene sia meno evidente) nel maggior numero dei casi, si vedono dei leggeri moti, che corrispondono per la loro frequenza a quelli del respiro prima che cominciasse l'asfissia, o sono di poco più lenti. Mettendo una vescichetta di gomma colle pareti sottili in comunicazione colla trachea per produrre l'asfissia, questi movimenti del respiro appaiono evidentissimi, sebbene guardando solo il torace non si scorgano. Così trascorrono due minuti,

(<sup>1</sup>) A. Mosso, *Il tono muscolare*: Giornale della R. Accademia di medicina di Torino. Novembre 1903.

e qualche volta due minuti e mezzo, senza che l'animale reagisca e si muova e poi compariscono le respirazioni finali che sono accompagnate dai movimenti delle estremità e della coda, talora con defecazione; fenomeni questi che indicano una eccitazione diretta delle cellule nervose nel midollo spinale prodotta dall'asfissia, mentre il sangue circola ancora, come si sente dal polso delle arterie.

La pupilla durante la pausa è molto dilatata e questo accenna ad una irritazione del simpatico ed a una contrazione dei vasi sanguigni. Non discuto in questa Nota i fenomeni della circolazione perchè sono molto complessi, essi furono studiati da Richet, da Landergren (<sup>1</sup>) e da altri.

I movimenti del cuore sono meno istruttivi per conoscere l'azione dell'asfissia sui centri nervosi, perchè le modificazioni subite dal muscolo cardiaco nell'asfissia, rendono più complicato il problema. Per il nostro studio sulla vulnerabilità dei centri respiratori nel midollo allungato, basta affermare, come mi assicurai con apposite esperienze, che cessa il respiro e compare la reazione della tonicità, quando non vi è alcun mutamento nel centro inibitore cardiaco ed in quello vasomotorio (<sup>2</sup>).

*Critica delle teorie emesse  
per spiegare la pausa dei movimenti respiratori nell'asfissia.*

Dopo che Rosenthal annunciò nel 1861, come l'irritazione del nervo laringeo superiore determini una sospensione dei movimenti del diaframma e una diminuzione nel numero delle respirazioni, e paragonò questo effetto alla irritazione del nervo vago che arresta il cuore, Schiff (<sup>3</sup>) dimostrò che questa non è un'azione speciale del nervo laringeo, ma che molti altri nervi sensibili producono il medesimo effetto, e che la compressione della pelle, in qualunque luogo venga fatta, produce un rilasciamento del diaframma e un prolungamento nella inspirazione del torace. Si svolse in seguito una ricca letteratura intorno ai centri inibitori della respirazione, che fu esposta dal Rosenthal stesso (<sup>4</sup>) e dal Knoll (<sup>5</sup>) il quale insieme a molti altri fisiologi è di parere che l'irritazione dei nervi che arrestano il respiro, non sia da paragonarsi all'azione che il vago esercita sul cuore.

Högyes (<sup>6</sup>) nel suo importante lavoro sull'asfissia attribuì la pausa del

(<sup>1</sup>) Landergren (Skand. Archiv f. Physiologie VII, Bd. 1899, p. 1), dimostrò come durante la pausa l'eccitazione del centro del vago raggiunga il massimo della sua eccitazione.

(<sup>2</sup>) A. Mosso, *Il tono muscolare*. Giornale della R. Accademia di medicina di Torino, Novembre 1903.

(<sup>3</sup>) M. Schiff, Comptes rendus, tom. 53, 1861, p. 330.

(<sup>4</sup>) Hermann, Handbuch der Physiologie, 4, II, Ih. p. 252.

(<sup>5</sup>) Ph. Knoll, Fünfte Mittheilung. Sitzungsberichte k. Ak. Wiss. Wien 1885, p. 306.

(<sup>6</sup>) Högyes, *Experimentelle Beiträge über den Verlauf der Atmungsbewegungen während der Erstickung*. Arch. f. esperim. Path. und Pharmak. V. B. p. 86, 1876.

respiro ad un probabile stato di eccitazione, o di esaurimento, dei centri vasomotori, per modo che si modificasse la circolazione sanguigna nel midollo allungato: e questa variante della nutrizione, egli disse essere la causa dei mutamenti osservati nel respiro.

Basta scrivere la pressione sanguigna per diffidare di una simile spiegazione. Questa è del resto la vecchia ipotesi emessa da Filehne per la interpretazione del fenomeno di Cheyne Stokes che venne dopo abbandonata, perchè manca di una base sperimentale e non è cosa probabile, come ho dimostrato in altri miei lavori.

Langendorff (<sup>1</sup>) studiando le ragioni della pausa conchiuse che si tratta di una eccitazione e dopo di una paralisi finale dei centri inibitori del respiro. Mentre io sono d'accordo col Langendorff nell'ammettere che gli animali anche senza il midollo allungato possono compiere dei movimenti respiratori simili ai normali (come lo dimostrerò nella prossima Memoria) non posso accettare la sua dottrina per quanto si riferisce ai centri inibitori respiratori (<sup>2</sup>), Kronecker, Marckwald e Aducco (<sup>3</sup>) facendo la critica dei lavori di Langendorff negarono già l'esistenza di un centro inibitore dei moti respiratori. È la vecchia ipotesi emessa prima da Brown Sequard, il quale ammise che quando si distrugge il midollo allungato, l'arresto del respiro dipenda da fenomeni di inibizione, che si producono per la irritazione dei centri inibitori sottostanti.

Però mentre che Langendorff, nella Memoria citata del 1893, dichiara che non crede sufficiente ammettere l'eccitazione di un centro inibitore per spiegare l'arresto del respiro che producesi nell'asfissia, Landergren (<sup>4</sup>) fa sua nuovamente questa ipotesi e la difende.

Tale supposizione, benchè non dimostrata, trova una ragione d'essere, se si nega l'esistenza dei centri respiratori spinali. Vedendo ad esempio un coniglio al quale si lega la trachea che rimane circa mezzo minuto, od un minuto, senza respirare e che dopo può fare venti, o trenta, respirazioni prima di morire, può facilmente supporsi che si tratti di un arresto del respiro prodotto da un centro inibitore che prima agisce e trattiene i moti del respiro, e che dopo cessando di funzionare, permette che ricomincino i moti respiratori.

Dimostrata però, come vedremo nella prossima Memoria, l'esistenza dei centri respiratori spinali, i quali funzionano in modo identico a quelli del

(<sup>1</sup>) O. Langendorff, *Mittheilungen zur Athmungs lehre*. Archiv. f. Physiologie, 1893, p. 412.

(<sup>2</sup>) O. Langendorff, *Fünfte Mittheilung*. Ibid. 1881, p. 521.

(<sup>3</sup>) V. Aducco, *Archives italiennes de Biologie* XIII, p. 96.

(<sup>4</sup>) E. Landergren, *Ueber die Erstickunserscheinungen an Kreislaufs und Athmungsapparaten*. Skand. Archiv. VII Bd. p. 12.

midollo allungato, e riconosciuto che la vitalità dei centri spinali è maggiore di quella dei centri più differenziati che stanno superiormente vicini al cervello, il problema cambia di aspetto, e noi possiamo considerare la pausa del respiro nell'asfissia, come l'effetto della paralisi del midollo allungato, che mostrasi realmente ineccitabile anche per correnti elettriche forti.

Perchè riprenda dopo il respiro coi movimenti finali, lo mostrai in un lavoro sulla estensione degli eccitamenti respiratori ai centri spinali (<sup>1</sup>) dove trovai che basta un leggero grado di asfissia per impedire che gli eccitamenti respiratori si diffondano ai muscoli delle estremità. Probabilmente qui succede la stessa cosa per gli impulsi respiratori che vengono dai centri spinali, i quali appena comincia l'asfissia, trovano una resistenza nelle vie di trasmissione; e deve crescere per un certo tempo l'asfissia, durante la pausa, fino al momento in cui gli stimoli che manderanno le cellule nervose spinali, siano diventati così forti, da poter superare la resistenza maggiore che presentano i nervi diventati meno eccitabili. Anche le esperienze fatte da Grünhagen (<sup>2</sup>) sui nervi motori, le quali mostrarono che sono meno eccitabili per mezzo dell'anidride carbonica, possono servire per spiegare questo fenomeno.

#### *La mancanza dei centri inibitori del respiro.*

I fisiologi parlano spesso di centri inibitori del respiro, per quanto sia ancora avvolto da tenebre questo capitolo della fisiologia che riguarda la natura degli eccitamenti respiratori, la prudenza consiglia di non ammettere l'esistenza di questi centri fino a che non sia provata. Ed ora non vi è alcun fatto che valga a dimostrare l'esistenza di un centro inibitore del respiro simile a quello donde prende origine il nervo vago pel cuore.

L'inibizione dei movimenti respiratori è costituita dalla forma più semplice dei processi arrestatori: da quella cioè nella quale la soppressione dell'attività del centro motore si fa per mezzo dello stimolo di un nervo sensibile. Si può forse applicare ai centri respiratori quanto Bubnoff (<sup>3</sup>) ed Heidenhain osservarono per la irritazione della corteccia cerebrale, cioè che l'irritazione di una medesima parte della corteccia cerebrale, secondo la intensità della corrente che si adopera, produce un eccitamento dell'apparato motore, oppure fa cessare una eccitazione precedente.

(<sup>1</sup>) A. Mosso, *L'estensione degli eccitamenti respiratori ai centri spinali*. Archivio di fisiologia, diretto dal prof. Fano, fasc. 2°.

(<sup>2</sup>) A. Grünhagen, *Versuche über intermittirende Nervenreizung*. Archiv. f. g. Physiologie Bd. 6, 1872, p. 180.

(<sup>3</sup>) Bubnoff und Heidenhain, *Ueber Erregungs- und Hemmungsvorgänge innerhalb der motorischen Hirncentren*. Archiv f. d. ges. Physiologie, vol. 26, 1881, p. 183.

Sherrington aveva pure dimostrato nel 1893, che nelle scimmie l'eccitazione di una parte della corteccia cerebrale produceva una inibizione nel tono dei muscoli dell'occhio, e più tardi lavorando con E. Hering (<sup>1</sup>), trovò che diminuendo l'eccitazione, si otteneva sempre un rilasciamento dei muscoli.

Ricerche analoghe fatte da Wedensky (<sup>2</sup>) ci permettono di concludere che i fenomeni di inibizione sono molto estesi e che possono manifestarsi sempre nell'attività del sistema nervoso, senza dover ricorrere alla esistenza di centri inibitorî coi loro nervi e congegni nervosi speciali.

Infatti, noi vediamo che gli stessi nervi i quali sono capaci di eccitare i movimenti respiratori, sono pure capaci di inibirli, se vengono eccitati più fortemente. Non possiamo quindi ammettere l'esistenza di un centro inibitore, simile a quello del vago, fino a che, non si riesca a trovare nel sistema nervoso una via od un sistema di nervi che tagliati, o paralizzati, lascino persistere un aumento del ritmo respiratorio, come osservasi per la paralisi del centro inibitore cardiaco.

Nella pausa del respiro, prodotta dall'asfissia, invece di ammettere che vi siano due azioni nervose contrarie che si elidono, è più logico ammettere, che non esista tale coercizione e che il riposo sia prodotto semplicemente dalla paralisi delle cellule che stanno nel midollo allungato, donde partono gli impulsi motori pei muscoli del respiro.

Infatti senza alcuna eccezione troviamo prodursi la pausa del respiro per effetto delle cause paralizzanti, come la cocaina applicata direttamente sul midollo allungato o l'asfissia, o l'anemia, od il cloralio iniettato nelle vene.

Vedendo che cessano rapidamente gli altri riflessi, e che l'animale cade privo di coscienza e che si rilasciano i muscoli, non vi è ragione per ammettere che le cellule nervose del midollo allungato debbano resistere più lungamente in lotta le une colle altre. Questo apparirà meglio nella prossima Memoria, quando vedremo essere il midollo spinale che produce le respirazioni finali, perchè esso conserva più a lungo l'eccitabilità, che non facciano le cellule nervose dei centri superiori meglio differenziate.

### Fisiologia. — *I centri respiratori spinali e le respirazioni che precedono la morte.* Nota del Socio ANGELO MOSSO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(<sup>1</sup>) H. E. Hering und C. S. Sherrington, *Ueber Hemmung der Contraction willkürlicher Muskeln.* Archiv. f. ges. Physiologie, Bd. 68, p. 222.

(<sup>2</sup>) N. E. Wedensky, *Die Erregung, Hemmung und Narcose.* Archiv. f. d. ges. Physiologie, Bd. 100, p. 1, 1903.

**Matematica.** — *I problemi di riduzione per le forme differenziali risolti con metodo diretto.* Nota IX del Corrispondente ERNESTO PASCAL<sup>(1)</sup>.

Abbiamo già detto nell'introduzione alla Nota VI, che, prima di terminare queste ricerche, avremmo anche risoluto i problemi di riduzione con metodo più diretto, e propriamente con metodo non fondato sulla teoria delle trasformazioni infinitesime, come è quello finora adoperato. È a questa promessa che ci proponiamo ora di soddisfare. E tanto più ci piace di passare alla trattazione di quest'altro metodo, in quanto esso può anche rappresentare una importante applicazione delle varie formole fin qui stabilite, e il procedimento che con esso si viene a seguire ha un aspetto di notevole eleganza e semplicità.

È da osservare però che noi intendiamo limitarci solo ad alcuni rapidi cenni, giacchè per il resto possono largamente supplire gli sviluppi dati nelle precedenti Note, a cui continuamente ci riferiremo.

### 1. Cominceremo dal primo problema.

Supponiamo che con una trasformazione delle  $x$  nelle  $y$ , la  $X^{(r)}$  si muti in  $Y^{(r)} = \sigma T^{(r)}$  dove  $T^{(r)}$  non contenga la variabile  $y_n$ .

Dovrà avversi

$$(1) \quad Y_{nj_1 \dots j_s} = 0 \quad (s = 0, \dots, r-1)$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial y_n} \frac{Y_{i_1 \dots i_v}}{Y_{j_1 \dots j_p}} = 0$$

ovvero

$$\frac{1}{Y_{i_1 \dots i_v}} \frac{\partial Y_{i_1 \dots i_v}}{\partial y_n} = \frac{1}{Y_{j_1 \dots j_p}} \frac{\partial Y_{j_1 \dots j_p}}{\partial y_n} = \mu$$

$$(3) \quad \frac{\partial Y_{j_1 \dots j_p}}{\partial y_n} = \mu Y_{j_1 \dots j_p}$$

nella quale ultima formola deve intendersi che  $\mu$  sia una funzione delle variabili che non cambii col mutare degli indici  $j_1 \dots j_p$  e col mutare di  $\varrho$ .

Intendiamo ora calcolato il simbolo principale di 1<sup>a</sup> specie ( $j_1 \dots j_p, n$ ) relativo alla  $Y^{(r)}$ , e osserviamo che essendo

$$(j_1 \dots j_p, n) = ((j_1 \dots j_p, n)) + (-1)^{\varrho} ((n, j_1 \dots j_p))$$

ed essendo, per effetto di (1), sempre zero il secondo termine, perchè tutti i suoi termini contengono sempre una  $Y$  di cui uno degli indici è  $n$ , ed il primo termine per le medesime (1) riducendosi al solo primo membro di (3),

(1) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.

si ha semplicemente:

$$(4) \quad (j_1 \dots j_\rho n)_x = \frac{\partial Y_{j_1 \dots j_\rho}}{\partial y_n}$$

e quindi

$$(5) \quad (j_1 \dots j_\rho n)_x = \mu Y_{j_1 \dots j_\rho}.$$

Sostituiamo ora ad ambo i termini di questa relazione i loro valori dati rispettivamente dalla formola (18) della Nota II e (7) della Nota I.

Si ha:

$$(6) \quad \sum_i \binom{i}{n}_{xy} \sum_h \left[ (h_1 \dots h_\rho i)_x \binom{h_1 \dots h_\rho}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + \{h_1 \dots h_{\rho-1} i\}_x \binom{h_1 \dots h_{\rho-1}}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + \dots \right] = \\ = \mu \sum_h \left[ X_{h_1 \dots h_\rho} \binom{h_1 \dots h_\rho}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + X_{h_1 \dots h_{\rho-1}} \binom{h_1 \dots h_{\rho-1}}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + \dots \right].$$

Dovendo questa relazione sussistere identicamente, saranno eguali, al primo e secondo membro, i coefficienti delle medesime combinazioni di derivate delle  $x$  rispetto alle  $y$ , cioè delle medesime  $\binom{h_1 \dots h_s}{j_1 \dots j_\rho}_{xy}$ ; abbiamo perciò le equazioni (sostituendo a  $\binom{i}{n}_{xy}$  il suo valore  $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ )

$$(7) \quad \begin{aligned} \sum_i (h_1 \dots h_\rho i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} &= \mu X_{h_1 \dots h_\rho} \\ \sum_i \{h_1 \dots h_{\rho-1} i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} &= \mu X_{h_1 \dots h_{\rho-1}} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Queste equazioni devono verificarsi per *qualunque*  $\rho$  da 1 sino a  $r$ ; quindi in conclusione possiamo dire che le derivate delle  $x$  rispetto alla  $y_n$  devono soddisfare le equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} \sum_i (h_1 \dots h_\rho i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \mu X_{h_1 \dots h_\rho}, & (\rho = 1, 2, \dots, r) \\ \sum_i \{h_1 \dots h_{\rho-1} i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \mu X_{h_1 \dots h_{\rho-1}}, & (\rho = 1, 2, \dots, r-1) \end{cases}$$

alle quali bisogna poi aggregare un'ultima che si deduce da quella fra le (1) di cui non abbiamo ancora tenuto conto, cioè della  $Y_n = 0$ , il che dà

$$(9) \quad \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0.$$

Per la risolubilità del problema deve dunque essere zero la matrice delle equazioni lineari (8) e (9), cioè

$$(10) \quad M + \sum_{\varrho=1}^{r-1} [(M)_\varrho + \{M\}_\varrho] + (M)_r$$

e si ha così il risultato già da noi ottenuto nel paragrafo 1 della Nota VI.

La anzidetta condizione è anche sufficiente. Infatti soddisfatta tale condizione, le (8) (9) sono compatibili, e può trovarsi almeno un sistema di valori per le derivate  $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ . Ammettiamo per un momento che possa trovarsi una trasformazione delle  $x$  nelle  $y$  tale che le derivate di  $x_i$  rispetto ad  $y_n$  abbiano i trovati valori. Facciamo vedere che allora restano soddisfatte le (1) (2). In primo luogo dalla (9) si deduce  $Y_n = 0$ . Inoltre sottraghiamo le due (8) coi medesimi indici, e otteniamo

$$\sum_i ((i, h_1 \dots h_\varrho))_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots r-1)$$

e moltiplicando per

$$\binom{h_1 \dots h_\varrho}{j_1 \dots j_s}_{xy} \quad (\varrho \leq s \leq r-1),$$

e indi sommando da  $\varrho=1$  sino a  $\varrho=s$  e per tutti i possibili valori delle  $h$ , si ha:

$$\sum_{\varrho=1}^s \sum_i \sum_h ((i, h_1 \dots h_\varrho))_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \binom{h_1 \dots h_\varrho}{j_1 \dots j_s}_{xy} = 0$$

che, per effetto di una formola della Nota II, non è altro che

$$(11) \quad ((n, j_1 \dots j_s))_y = 0.$$

Si ha dunque che, soddisfatte le (8), sono zero tutte le (11) per ogni  $s$  da 1 ad  $r-1$ .

Per  $s=1$  si ha  $((n, j))_y = 0$ , ed essendo  $Y_n = 0$  sarà  $Y_{nj} = 0$ . Per  $s=2$  si ha  $((n, j_1 j_2)) = 0$  ed essendo già  $Y_n = Y_{nj_1} = Y_{nj_2} = 0$  si ha  $Y_{nj_1 j_2} = 0$ ; così seguitando, si vede che soddisfatte le (8) (9) restano soddisfatte tutte le (1).

Soddisfatte queste, lo sono le (4), e quindi, ricavandosi dalla sussistenza delle (8) quella delle (5), ne risulta la sussistenza di (3) e perciò di (2).

Vediamo ora come si trova la trasformazione delle  $x$  nelle  $y$  che risolve il problema, e la cui esistenza abbiamo ammessa di sopra.

Se la matrice (10) è zero, le equazioni (8) (9) ammettono una soluzione comune che chiameremo:

$$\xi_1 \dots \xi_n \mu,$$

e formiamo l'equazione a derivate parziali

$$(12) \quad \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

che avrà  $n-1$  integrali indipendenti

$$(13) \quad y_i = \varphi_i(x) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

a cui, al solito, aggregheremo una nuova funzione arbitraria, ma indipendente dalle precedenti:

$$(14) \quad y_n = \varphi_n(x).$$

La trasformazione (13) (14) risolve il problema, e ogni trasformazione che risolve il problema è di questo tipo. Infatti si sa che i differenziali delle  $x$  ricavati dalle (13) e considerandovi  $y_1 \dots y_{n-1}$  come costanti, sono proporzionali a  $\xi_1 \dots \xi_n$  che sono i coefficienti di (12); d'altra parte considerando le  $x$  funzioni delle  $y$ , le derivate parziali  $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$  sono proprio i rapporti dei differenziali di  $x_i$  presi nell'ipotesi che  $y_1 \dots y_{n-1}$  siano costanti, pel differenziale di  $y_n$ , dunque tali derivate parziali sono proporzionali alle  $\xi$ :

$$(15) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \xi_i$$

e soddisfanno perciò alle (8) (9) con un valore diverso per l'incognita  $\mu$ . Di qui si deduce, come sopra, che sono soddisfatte le (1) (2) e quindi è risoluto il problema.

Viceversa, risoluto il problema, le derivate  $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$  devono soddisfare alle (8) (9), e quindi, conservando per le  $\xi$  il precedente significato, saranno soddisfatte le (15), cioè i differenziali di  $x_1 \dots x_n$ , nell'ipotesi di  $y_1 \dots y_{n-1}$  costanti, saranno proporzionali alle  $\xi_1 \dots \xi_n$ , e perciò, risolvendo le supposte formole di trasformazione rispetto alle  $y_1 \dots y_n$ , le  $y_1 \dots y_{n-1}$  soddisferanno alla equazione a derivate parziali (12).

Come si vede, abbiamo così ritrovato in tutte le sue parti principali, il risultato del paragrafo 1 della Nota VI, che contiene però, in più, il significato elegante e degno di nota, del primo membro della equazione (12),

e cioè che tal primo membro rappresenta una trasformazione infinitesima che lascia invariata  $X^{(r)} = 0$ , e per cui sono zero l'invariante  $A$  e il covariante  $C^{(r-1)}$ .

2. Passiamo ora al secondo problema.

Supponiamo che sia

$$(16) \quad Y^{(r)} = T^{(r)} + Z^{(r)}$$

dove  $T^{(r)}$  non contenga  $y_n$ , e  $Z^{(r)}$  sia un differenziale canonico. Ricordando quanto abbiamo dimostrato nel paragrafo 2 della Nota VII, che cioè per un differenziale canonico  $Z^{(r)}$  sono zero gli elementi delle matrici

$$(M')_r, \{M'\}_{r-1}, \dots$$

si ha che, in particolare, saranno zero per  $Z^{(r)}$  i simboli

$$(j_1 \dots j_r n), \{j_1 \dots j_{r-1} n\}, \dots$$

e poichè questi simboli sono anche zero per  $T^{(r)}$  perchè uno dei loro indici è sempre  $n$ , così si vede che essi saranno zero per le  $Y$ , cioè si avrà

$$(17) \quad (j_1 \dots j_r n)_Y = 0, \{j_1 \dots j_{r-1} n\}_Y = 0, \dots$$

Vediamo ora come da queste relazioni possano ricavarsi delle equazioni lineari cui soddisfanno le derivate di  $x_1 \dots x_n$  rispetto ad  $y_n$ .

Consideriamo una delle equazioni (17), p. es.

$$(18) \quad (j_1 \dots j_s n)_Y = 0 \quad (s = r, r-2, r-4, \dots)$$

e applichiamo al primo membro la formula (18) del paragrafo 4 della Nota II, che dà la espressione del simbolo in  $Y$  mediante simboli in  $X$ . Si ha

$$(19) \quad \begin{aligned} (j_1 \dots j_s n)_Y &= \sum_h \left[ \sum_i (h_1 \dots h_s i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] (h_1 \dots h_s)_{xy} + \\ &+ \sum_h \left[ \sum_i \{h_1 \dots h_{s-1} i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] (h_1 \dots h_{s-1})_{xy} + \\ &+ \dots = 0. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che si sia già dimostrato che dalle (17) risultano le equazioni

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_i \{h_1 \dots h_{s-1} i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \sum_i (h_1 \dots h_{s-2} i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \dots \end{cases};$$

dalla (19) risulta allora

$$(21) \quad \sum_h \left[ \sum_i (h_1 \dots h_s i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \binom{h_1 \dots h_s}{j_1 \dots j_s}_{xy} = 0.$$

Ma osserviamo che

$$\binom{h_1 \dots h_s}{j_1 \dots j_s}_{xy} = \frac{\partial x_{h_1}}{\partial y_{j_1}} \dots \frac{\partial x_{h_s}}{\partial y_{j_s}}$$

e nelle (21) cominciamo col far variare l'indice  $j_s$  da 1 ad  $n$ . Si ha allora un sistema di  $n$  equazioni lineari che potremo scrivere:

$$\sum_{n_s=1}^n \left[ \sum_h \sum_i (h_1 \dots h_s i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \binom{h_1 \dots h_{s-1}}{j_1 \dots j_{s-1}}_{xy} \right] \frac{\partial x_{h_s}}{\partial y_{j_s}} = 0 \\ (j_s = 1, 2, \dots, n).$$

Poichè il determinante funzionale delle  $x$  rispetto alle  $y$  deve essere naturalmente diverso da zero, risulta di qui l'annullarsi identico di tutte le quantità racchiuse in parentesi quadra; si ha così una nuova equazione che può trattarsi collo stesso procedimento, finchè abbiamo infine

$$(22) \quad \sum_i (h_1 \dots h_s i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0.$$

Dunque dalla sussistenza delle (20) sino all'indice  $s - 1$  ne risulta la sussistenza della seguente per l'indice seguente  $s$ . Lo stesso si avrebbe se invece di considerare un simbolo di prima specie (18) se ne considerasse uno di seconda, e nelle equazioni (20) si scambiassero fra loro i simboli di prima specie con quelli di seconda specie. Intanto il caso di  $s - 1 = 1$  può provarsi direttamente, e da esso resta dunque dimostrato per induzione la sussistenza di tutte le (20).

Infatti, secondochè  $r$  è pari o dispari l'ultima delle (17) è  $\{j n\}_r = 0$  ovvero  $(j n)_r = 0$ , e queste trasformate nelle X diventano

$$\sum_h \left[ \sum_i \{h i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \frac{\partial x_h}{\partial y_j} = 0$$

ovvero rispettivamente

$$\sum_h \left[ \sum_i (h i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \frac{\partial x_h}{\partial y_j} = 0$$

e da queste col medesimo metodo di sopra, cioè facendo variare  $j$  e consi-

derando il sistema delle  $n$  equazioni lineari omogenee delle quali il determinante dei coefficienti è il determinante funzionale delle  $x$  rispetto alle  $y$ , si deduce (se  $r$  è pari):

$$(23) \quad \sum_i \{h_i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0$$

ovvero (se  $r$  è dispari):

$$(24) \quad \sum_i (h_i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0.$$

Ricaviamo dunque dalla sussistenza delle (17), quella delle equazioni lineari

$$(25) \quad \begin{cases} \sum_i (h_1 \dots h_r i)_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \sum_i \{h_1 \dots h_{r-1} i\}_x \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

di cui l'ultima è la (23) se  $r$  è pari, ed è la (24) se  $r$  è dispari.

*Per la risolubilità del problema deve dunque essere zero la matrice delle equazioni lineari (25), cioè*

$$(26) \quad (\mathbf{M}')_r + \{\mathbf{M}'\}_{r-1} + \dots$$

e questo è il risultato ottenuto nel paragrafo 4 della Nota VII e nel paragrafo 1 della Nota VIII.

Può dimostrarsi che la anzidetta condizione è anche sufficiente, e può contemporaneamente trovarsi anche il modo per costruire la più generale trasformazione finita che effettua la riduzione.

Se infatti la matrice (26) è zero, le equazioni (25), considerandovi come incognite le  $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ , ammettono almeno una soluzione comune  $\xi_1 \dots \xi_n$ , e formando

$$(27) \quad \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

e chiamando

$$(28) \quad y_i = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

gli integrali di questa, e aggregando arbitrariamente una

$$(29) \quad y_n = \varphi_n(x)$$

che sia indipendente dalle precedenti, si dimostra, come nel paragrafo 1, che le derivate  $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$  ricavate da (28) (29) soddisfanno alle (25). Per effetto

della (19) e di quella analoga in cui il primo membro sia un simbolo principale di seconda specie, restano dunque soddisfatte tutte le (17), e quindi ripetendo allora il medesimo ragionamento fatto sulle formole (19) del paragrafo 4 della Nota VII, se  $r$  è pari, o sulle formole (3) del paragrafo 1 della Nota VIII se  $r$  è dispari, si giunge a mostrare che resta risoluto il problema di riduzione, cioè che sussiste la (16).

Resta a mostrare che la soluzione così trovata è la più generale possibile, cioè, in termini più precisi, che ogni trasformazione che effettua la desiderata riduzione deve potersi trovare col procedimento indicato. Ed infatti se le derivate parziali di  $x_1 \dots x_n$  rispetto ad  $y_n$  soddisfanno le (25), conservando per le  $\xi$  lo stesso significato che sopra, i differenziali  $dx_1 \dots dx_n$  presi nell'ipotesi di  $y_1 \dots y_{n-1}$  costanti, cioè, in sostanza, le predette derivate parziali moltiplicate per  $dy_n$ , devono essere proporzionali alle  $\xi_1 \dots \xi_n$ . Ciò mostra che, formate le (28), le funzioni  $\varphi$  devono essere  $n - 1$  integrali indipendenti della equazione a derivate parziali (27).

Collo stesso metodo potrebbe anche trattarsi il problema di trasformare  $X^{(r)}$  in una forma con una variabile di meno, più un differenziale  $r^{mo}$  esatto, problema di cui abbiamo trattato, col metodo delle trasformazioni infinitesime, nel paragrafo 2 della Nota VIII; ma su ciò non crediamo necessario indulgiare (1).

(1) Terminando con questa la serie delle Note sulle forme differenziali che mi era proposto di pubblicare in quest'anno in questi Rendiconti, prendo l'occasione per rilevare quegli errori di stampa di cui mi sono accorto rileggendo le Note precedenti, e dei quali del resto un lettore attento può facilmente accorgersi da sè stesso. Essi sono:

Nota I, 1 <sup>o</sup> sem. pag. 329, form. (16):	$\delta p$	leggi: $d\delta$
" " pag. 330, form. (19):	$\binom{r}{\rho}$	" $\binom{r}{p}$
" " " "	$d^{r-p} \varphi$	" $d^{r-p} \varphi$
" " " "	al secondo membro manca	$\sum_j \sum_i$
" " pag. 332, form. (24):	$d^r \xi_{j_m}$	leggi: $d^k \xi_{j_m}$
Nota II, " pag. 374, 2 <sup>a</sup> riga della form. (13):	$\sum_{s=1}^{\sigma}$	" $\sum_{s=1}^{\sigma}$
" " " riga 7 <sup>a</sup> :	$\binom{i_m}{k}$	" $\binom{j_m}{k}$
" " " form. (16):	$\sum_{s=2}^{\sigma-1}$	" $\sum_{s=2}^{\sigma+1}$
Nota III, " pag. 407, ultima riga:	$\{j_1 \dots j_{\rho-2}\}$	" $\{j_1 \dots j_{\rho-2} i\}$ .
Nota V, 2 <sup>o</sup> sem. pag. 181, riga 22:	$\infty^\sigma$	" $\infty^{n+1-\sigma}$ .

Ricordo inoltre che come continuazione di queste ricerche è anche da considerarsi l'altra Nota da me pubblicata recentemente nei Rend. dell'Ist. Lomb. ((2), t. XXXVI, 1903, pp. 978-985) e intitolata: *Sulle forme differenziali omogenee di ordine superiore.*

**Meccanica.** — *Sul problema dei tre corpi. Condizioni d'urto di due di essi.* Nota del dott. GIULIO BISCONCINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA<sup>(1)</sup>.

Nella presente Nota ci proponiamo di esporre i risultati di un lavoro, che fu ispirato da una Memoria del prof. Levi-Civita<sup>(2)</sup>.

In essa l'autore prende a considerare il moto piano di un punto di massa trascurabile attratto da due punti di masse finite, studia le traiettorie lungo le quali avviene od è avvenuto un urto con uno dei centri di attrazione, e determina la condizione affinchè ciò avvenga.

Lo scopo della nostra ricerca, per la quale in buona parte ci sono state utili le considerazioni svolte dal Levi-Civita, è stato, come avverte il titolo stesso della Nota, lo studio dell'analogo problema nel caso generale; la determinazione cioè delle condizioni, sotto le quali due dei tre corpi devono urtarsi.

1. Dati i tre punti  $P_0, P_1, P_2$  di masse rispettive  $m_0, m_1, m_2$ , si consideri il moto di  $P_1, P_2$  rispetto a una terna d'assi  $x, y, z$  di orientazione costante coll'origine in  $P_0$  e si indichino con  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  le coordinate di questi punti rispetto alla terna di riferimento, con  $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2$  le componenti delle loro quantità di moto assolute. È noto allora che le equazioni canoniche del moto relativo di  $P_1$  e  $P_2$  sono:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & \frac{dz_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & \frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}; \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

avendo posto:

$$(2) \quad H = K - U = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \mu_i (p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) + \frac{1}{m_0} (p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) \right\} - \left\{ m_0 \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} + \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right\}$$

in cui s'è scritto  $\mu_i$  invece di  $\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0}$ <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> Presentata nella seduta del 22 novembre 1903.

<sup>(2)</sup> *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* Annali di Matematica. T. IX, serie III.

<sup>(3)</sup> Senza togliere nulla alla generalità della questione abbiamo ammesso:

a) disponendo delle costanti delle quantità di moto che il centro di gravità del sistema sia fisso,

b) disponendo dell'unità di tempo, che la costante di attrazione universale si riduca uguale all'unità.

Sì sostituiscano ora alle quantità di moto del punto  $P_1$  le componenti della sua velocità relativa mediante le formule:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \mu_1 p_1 + \frac{p_2}{m_0}, \\y'_1 &= \frac{\partial H}{\partial q_1} = \mu_1 q_1 + \frac{q_2}{m_0}, \\z'_1 &= \frac{\partial H}{\partial r_1} = \mu_1 r_1 + \frac{r_2}{m_0}.\end{aligned}$$

Il sistema, in virtù di questa trasformazione, non mantiene la forma canonica, ma possiamo però attribuirgli forma semicanonica ponendo:

$$\begin{aligned}\bar{H}_1 &= \frac{1}{2}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) - \mu_1 U - m_2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\varrho^3_2} + \frac{m_1 m_2}{m_0} \frac{1}{A}, \\\bar{H}_2 &= \frac{1}{2} \nu_2 (p^2_2 + q^2_2 + r^2_2) - U + \frac{1}{m_0 \mu_1} (x'_1 p_2 + y'_1 q_2 + z'_1 r_2),\end{aligned}$$

con  $\varrho_2$  e  $A$  indicando rispettivamente

$$\sqrt{x^2_2 + y^2_2 + z^2_2}, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

e avendo scritto  $\nu_2$  invece di  $\mu_2 + \frac{1}{\mu_1 m_0}$ .

Le (1) diventano allora:

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial x'_1} & \text{ecc.}, \\ \frac{dx'_1}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial x_1} & \text{ecc.}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial p_2} & \text{ecc.}, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}_2}{\partial x_2} & \text{ecc.}. \end{cases}$$

Sostituendo infine alle coordinate e alle componenti della velocità relativa del primo punto le sue coordinate polari  $\varrho_1, \vartheta_1, \varphi_1$  e le loro coniugate  $P_1, \Theta_1, \Phi_1$  mediante le formule:

$$(3) \quad \begin{cases} \begin{cases} x_1 = \varrho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \\ y_1 = \varrho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, \\ z_1 = \varrho_1 \cos \vartheta_1 \end{cases}, \\ \begin{cases} P_1 = x'_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y'_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + z'_1 \cos \vartheta_1, \\ \Theta_1 = \varrho_1 (x'_1 \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y'_1 \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 + z'_1 \sin \vartheta_1), \\ \Phi_1 = \varrho_1 \sin \vartheta_1 (-x'_1 \sin \varphi_1 + y'_1 \cos \varphi_1) \end{cases}, \end{cases}$$

e indicando con  $H_1$  e  $H_2$  ciò che diventano  $\bar{H}_1$  e  $\bar{H}_2$  per effetto di questa

sostituzione, il sistema (1') conserva la forma semicanonica rispetto ad  $H_1$  e  $H_2$ . Abbiamo cioè:

$$(1'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varrho_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1}, \\ \frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1}, \quad \frac{d\Theta_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1}, \quad \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial p_2} \text{ ecc.}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2} \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

2. Poichè le (1'') ammettono l'integrale delle forze vive  $H = \text{cost.}$ , e poichè la forza viva è una quadrica definita nelle componenti delle quantità di moto assolute dei tre punti, e quindi (ammesso fisso il centro di gravità del sistema) in quelle dei punti  $P_1, P_2$ , tenendo conto della (2) e dei cambiamenti di variabili eseguiti si arriva alle seguenti conclusioni:

I. se  $\varrho_1$  tende a zero (col convergere di  $t$  verso un valore  $t_1$ ) le sei funzioni di  $t$ :

$$\sqrt{\varrho_1} P_1, \frac{\Theta_1}{\sqrt{\varrho_1}}, \frac{\Phi_1}{\sqrt{\varrho_1} \sin \vartheta_1}; \sqrt{\varrho_1} p_2, \sqrt{\varrho_1} q_2, \sqrt{\varrho_1} r_2,$$

definite come integrali delle (1''), rimangono finite; le ultime tre anzi, come si potrebbe ricavare tenendo conto del secondo gruppo di equazioni (1''), tendono a zero.

II. In un intorno abbastanza piccolo di  $t_1$ ,  $\frac{d\varrho_1}{dt}$  si mantiene diversa da zero insieme al prodotto  $\sqrt{\varrho_1} P_1$ .

3. Il moto dei tre punti  $P_0, P_1, P_2$  si mantiene regolare, e le equazioni (1'') sono integrabili mediante serie convergenti, finchè le condizioni iniziali del moto non sieno tali, che dopo un tempo finito avvenga un urto (1).

Ora noi ammetteremo, che, sotto certe condizioni iniziali, una delle tre distanze, p. es.  $\varrho_1$ , si riduca a zero per  $t = t_1$ .

Siccome in un intorno sufficientemente piccolo di  $t_1$  (questo valore escluso) abbiamo visto, che  $\frac{d\varrho_1}{dt}$  è diversa da zero, e siccome, quando si escluda  $t_1$ , le funzioni  $\varrho_1, \vartheta_1, \varphi_1, P_1, \Theta_1, \Phi_1, x_2, \dots, p_2, \dots$  dipendono in modo regolare da  $t$ , così si conclude che  $t, \vartheta_1, \varphi_1$  ecc. si potranno riguardare, per valori di  $\varrho_1$  abbastanza piccoli ma diversi da zero, cioè sopra una traiettoria d'urto in vicinanza di  $P_0$ , funzioni regolari di questa variabile soddisfacenti

(1) Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, p. 583.

al sistema differenziale (1):

$$\frac{dt}{d\varrho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}}, \quad H = C;$$

$$(1'') \quad \left\{ \begin{array}{l} I \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_1}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \\ \frac{d\Theta_1}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \quad \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \end{array} \right. \\ II \quad \frac{dx_2}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_2}{\partial p_2} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1} \text{ ecc.}, \quad \frac{dp_2}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1} \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

Per discutere l'esistenza in un intorno di  $\varrho_1 = 0$ , di integrali regolari di questo sistema conviene operare in esso la trasformazione di variabili:

$$r = \sqrt{\varrho_1}, \quad R = -rP_1, \quad \vartheta'_1 = \frac{\Theta_1}{\varrho_1^2}, \quad \varphi'_1 = \frac{\Phi_1}{\varrho_1^2 \sin^2 \vartheta_1} \quad (?)$$

Possiamo allora, con un calcolo facile a verificare, arrivare al sistema:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} I \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vartheta_1}{dr} = -2r^2 \frac{\vartheta'_1}{R}, \quad \frac{d\varphi_1}{dr} = -2r^2 \frac{\varphi'_1}{R}, \\ r \frac{d\vartheta'_1}{dr} = -4\vartheta'_1 + r^3 \frac{2F_{\tilde{x}_1}}{R}, \quad r \frac{d\varphi'_1}{dr} = -4\varphi'_1 + r^3 \frac{2F_{\varphi_1}}{R}, \end{array} \right. \\ II \quad \frac{dx_2}{dr} = -2r \frac{F_{p_2}}{R} \text{ ecc.}, \quad \frac{dp_2}{dr} = -2r^2 \frac{F_{x_2}}{R}, \end{array} \right.$$

dove con  $F_{\tilde{x}_1}, F_{\varphi_1}, F_{x_2}, \dots, F_{p_2}, \dots$  si sono indicate delle funzioni di  $r, \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta'_1, \varphi'_1, x_2, \dots, p_2, \dots$  regolari per  $r$  abbastanza piccolo e per valori finiti degli altri argomenti.

A questa conclusione però si arriva dopo aver provato, giovandosi dei risultati ottenuti nel lemma I° del n. 2, che, per ogni soluzione reale del

(1) L'equazione  $\frac{dP_1}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$  si può sostituire, come è lecito, con l'equazione in termini finiti  $H = \text{cost.}$ , atta a fornire, come risulta dalla (2), la funzione  $P_1$  in termini delle altre. Integrate le dieci equazioni I e II risulta noto anche  $P_1$  e l'equazione  $\frac{dt}{d\varrho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}} = \frac{1}{P_1}$  ci dà modo di determinare la legge del moto.

(2) È appena necessario avvertire, per quanto riguarda il significato cinematico di  $\vartheta'_1$  e  $\varphi'_1$ , ch'esse rappresentano, come risulta dalle (3), le velocità angolari del raggio vettore relativo al punto  $P_1$  nel piano  $\varphi_1 = \text{cost}$  e  $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ .

sistema (S),  $\vartheta'_1$  e  $\varphi'_1$  devono ridursi a zero per  $r=0$  e quindi, in virtù delle prime due equazioni del primo gruppo, che per  $r=0$  tanto  $\vartheta_1$  quanto  $\varphi_1$  devono convergere verso valori determinati e finiti.

Ricordando allora (v. n. 2, lemma II°), che  $R = -\sqrt{\varrho_1} P_1$  si mantiene diverso da zero per  $r$  convergente a zero, si conclude che i secondi membri delle (S) sono regolari, e che perciò la singolarità del sistema dipende dal fatto, che le due seconde equazioni del primo gruppo contengono nel primo membro  $r$  a fattore.

Si rileva poi, dalla forma delle equazioni stesse, che è possibile determinare le successive derivate delle funzioni incognite in un intorno di  $r=0$  e quindi costruire le serie, che definiscono queste funzioni. Nulla avverte però che le serie debbano risultare convergenti. È applicando il metodo del calcolo dei limiti di Cauchy, che si dimostra anche questo fatto.

In definitiva si conclude, che « il sistema (S) ammette  $\infty^8$  integrali olomorfi, che per  $r=0$  diventano:  $\vartheta'_1 = \varphi'_1 = 0$  mentre le altre funzioni «  $\vartheta_1, \varphi_1, x_2, \dots, y_2, \dots$  assumono valori costanti arbitrari  $\vartheta_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, y_2^{(0)}, \dots$  ».

Poichè inoltre si prova:

1° che « non esistono soluzioni reali, all'infuori di quelle olomorfe, tali che per  $r=0$   $\vartheta'_1$  e  $\varphi'_1$  contemporaneamente si annullino, mentre le altre funzioni assumono valori costanti arbitrari »,

2° che « gli integrali olomorfi corrispondono effettivamente alle traiettorie d'un urto », cioè che « sopra una di esse  $r$  (e quindi  $\varrho_1$ ) si annulla in un intervallo di tempo finito comprendente l'istante iniziale », così concludiamo che:

*Tutte e soltanto le soluzioni del sistema (S), olomorfe per  $r=0$ , corrispondono alle traiettorie, lungo le quali avviene l'urto dei due corpi  $P_0, P_1$ .*

4°. In virtù dei valori che devono assumere gli integrali per  $r=0$ , è chiaro, che la forma delle soluzioni olomorfe corrispondenti alle traiettorie singolari, di cui abbiamo fatto parola, sarà:

$$\vartheta'_1 = r\beta_1^{(1)}(r, \vartheta_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, y_2^{(0)}, \dots), \quad \varphi'_1 = r\gamma_1^{(1)}(r, \vartheta_1^{(0)}, \dots);$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^{(0)} + r\beta_1(r, \vartheta_1^{(0)}, \dots), \quad \varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + r\gamma_1(r, \vartheta_1^{(0)}, \dots);$$

$$x_2 = x_2^{(0)} + r\alpha_2(r, \vartheta_1^{(0)}, \dots) \text{ ecc.}; \quad p_2 = p_2^{(0)} + r\alpha_2^{(1)}(r, \vartheta_1^{(0)}, \dots) \text{ ecc.},$$

$\beta_1, \gamma_1, \beta_1^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, \alpha_2, \dots, \alpha_2^{(1)}, \dots$  indicando delle funzioni regolari per  $r$  abbastanza piccolo, qualunque sieno i valori finiti degli altri argomenti.

Poichè variando questi ultimi in tutti i modi possibili si possono ottenere tutte le traiettorie d'urto, così è ben ovvio, che si avranno le condizioni, cui devono soddisfare  $r, \vartheta_1, \varphi_1$  ecc., affinchè appartengano ad una traiettoria singolare, eliminando le 8 costanti d'integrazione fra le 10 equazioni scritte.

Risolvendo le ultime otto rispetto a  $\vartheta_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}$  ecc. (il che è permesso dal fatto che il relativo determinante funzionale è diverso da zero in un intorno di  $r = 0$ ) e sostituendo questi valori, necessariamente regolari in un intorno di  $r = 0$  rispetto a  $r, \vartheta_1, \varphi_1$  ecc. nelle prime due, abbiamo due relazioni del tipo:

$$\begin{aligned}\vartheta'_1 - r F_1(r, \vartheta_1, \varphi_1, x_2, \dots, p_2, \dots) &= 0, \\ \varphi'_1 - r F_2(r, \vartheta_1, \varphi_1, x_2, \dots, p_2, \dots) &= 0.\end{aligned}$$

Si potrebbe proporci di sviluppare  $F_1$  ed  $F_2$  in serie di potenze rispetto ad  $r$  nell'intorno del punto  $r = 0$ , e sarebbe anche facile ricavare due equazioni alle derivate parziali atte a fornirci con successive derivazioni i coefficienti di queste serie, ma noi ci limiteremo qui ad avere accennato a questa possibilità e finiremo coll'osservare come le due equazioni di condizioni trovate dieno la materiale conferma di quanto aveva preveduto il sig. Painlevé <sup>(1)</sup>.

**Fisica. — Intorno ad un completo igrometro ad assorbimento.**  
Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

I modi più diretti per determinare il grado d'umidità dell'aria sono certamente quelli che sono usati coll'igrometro chimico e con quelli di Schwackhöfer e di Edelmann, e che consistono nel far assorbire il vapore acqueo dell'aria dall'acido solforico concentrato e nel determinare o l'aumento di peso di questo come avviene coll'igrometro chimico, o la diminuzione di volume o di pressione dell'aria cogli altri due igrometri; nel primo caso si ha il peso del vapore contenuto in un noto volume d'aria, nel secondo caso si ha la tensione o il volume di questo vapore.

In entrambi questi metodi si richiede una serie di operazioni di non breve durata, che può spesso esser causa di errore non lieve, e forse perciò l'uso di essi è assai poco frequente.

L'igrometro chimico non pare suscettibile di grandi modificazioni o semplificazioni, nè so che ne sia stata mai proposta qualche. Invece gli igro-

(1) Loc. cit. p. 286.

metri descritti quasi simultaneamente da Schwackhöfer (Meteor. Zeitschr. 1878, Beiblätter 1879) e da Edelmann (Wiedemann. Ann. d. Physik, t. VI, 1879, Meteor. Zeitschr. 1879) e fondati sullo stesso principio furono oggetto di un gran numero di modificazioni più o meno essenziali dovute a: Van Hasselt (Beibl. 1879), Rudorff (Chemische Berichte, 1880), Voller (Beibl. 1880), Tschaplowitz (Beibl. 1881), Dischka (Beibl. 1886), Sonden (Meteor. Zeitschr. 1892), Salvioni (N. Cimento, 1901) descritte alcune in giornali poco diffusi. Tschaplowitz, Dischka, Sonden e Salvioni propongono di osservare il fenomeno complementare, cioè l'aumento di pressione o di volume che subisce l'aria quando venga posta in presenza d'acqua e resa così satura di vapore.

Non mi pare che nessuna di queste modificazioni tolga completamente i due principali inconvenienti del metodo. Il più importante di questi, cui accenna Sonden, consiste nella lentezza colla quale per diffusione si compie l'assorbimento (o la saturazione) del vapore, lentezza che aumenta a misura che diminuisce la tensione del vapore (o che questo s'avvicina alla saturazione) e che può dare origine ad errori non trascurabili, sia che si creda completo l'assorbimento (o la saturazione) quando ancora non lo è, sia perchè nel lungo intervallo di tempo possono facilmente prodursi variazioni di temperatura che influiscono molto sull'igrometro (che è un termoscopio sensibilissimo) e che non sempre si possono correggere esattamente.

L'altro inconveniente, di poco valore teorico ma che in pratica tuttavia può bastare per limitare o escludere l'uso di questi igrometri è quello di dovere, dopo ogni determinazione, lavare, asciugare l'apparecchio e prepararlo per la successiva determinazione, ciò che oltre all'incomodo causa una perturbazione ed una perdita di tempo non piccolo per aspettare che l'apparecchio sia in perfetto equilibrio di temperatura coll'ambiente, e può causare un errore non piccolo nella determinazione seguente, se questo equilibrio non è stato raggiunto.

Ho costruito e provato due apparecchi coi quali si evitano completamente i suddetti due inconvenienti, perchè l'aria viene fatta scorrere o viene spinta continuamente sull'acido solforico e questo è contenuto in appositi recipienti separati che si possono collocare o togliere o scambiare. Inoltre diviene così possibile di determinare facilmente e rapidamente, in una stessa esperienza, entrambi gli effetti prodotti dall'assorbimento del vapore, cioè l'aumento di peso che ha subito l'acido solforico e la diminuzione di tensione che ha subito l'aria quando questo ha ceduto il suo vapore all'acido solforico, e l'esattezza della determinazione viene certamente aumentata e resa più sicura.

Il primo, e parmi migliore dei due apparecchi, è rappresentato nella figura 1. Due palloni uguali  $A$ ,  $A'$  comunicano inferiormente mediante un tubo di vetro e sono ripieni per metà di mercurio (oppure in mancanza di

questo con olio d'oliva, o di vaselina, o altro liquido non volatile) e per metà d'aria; essi possono comunicare anche superiormente attraverso un tubo  $T$  che contiene acido solforico e che si può collocare o togliere; esso è formato da due bolle cilindriche riunite da un tubo orizzontale di conveniente lunghezza, sormontate da due tubi verticali ripiegati ad uncino presso le estremità che sono coniche, un po' svasate, smerigliate internamente e che s'adattano esattamente sulle estremità pure coniche, ma un po' affilate e smerigliate esternamente, dei tubi coi quali terminano superiormente i palloni suddetti.

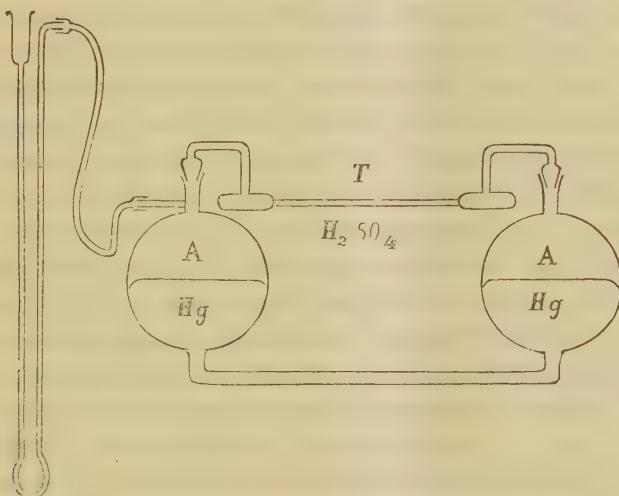


FIG. 1.

Affinchè questi coni smerigliati inferiori abbiano una certa mobilità necessaria per il perfetto adattamento nei corrispondenti coni smerigliati superiori, essi non sono saldati ma congiunti ai palloni mediante corti tubi di gomma; la chiusura fra le superfici smerigliate deve esser resa perfetta come al solito con grasso o mediante un pozzetto di mercurio. Uno dei palloni comunica inoltre superiormente mediante un tubo capillare ed un tubo di gomma di piccola sezione interna con un tubo di vetro ad U, alto circa 30 cm., di circa 4 mm. di diametro interno, graduato, contenente olio o un altro liquido non volatile e funzionante da manometro. È comodo che la graduazione sia in parti uguali a 13,6:  $d$  mm., se  $d$  è la densità del liquido adoperato, così le pressioni sono indicate in millimetri di mercurio dal numero delle suddette divisioni che misurano il dislivello.

I due palloni suddetti sono fissati su di una tavoletta che ha superiormente un foro nel quale passa comodamente un grosso chiodo o asta orizzontale che serve di sostegno, ed attorno al quale la tavoletta coi palloni può oscillare nel suo piano, mentre invece il manometro rimane fisso a parte.

Nella figura, per maggior chiarezza, il tubo  $T$  si trova fra i palloni e perciò i tubi verticali che sormontano le bolle sono ripiegati nel piano della figura stessa, mentre è preferibile che essi siano ripiegati perpendicolarmente a questo piano, oppure in piani convergenti dietro di esso, in modo che le bolle suddette cadano non framezzo ma davanti ai palloni, o meglio ancora davanti ma esternamente ad essi. In tal modo il tubo  $T$  coll'acido solforico risulta più lungo e l'assorbimento del vapore è più facile e completo; inoltre riesce più facile il collocare o togliere il tubo  $T$  senza toccare i palloni e scaldare così l'aria in essi contenuta, e finalmente riesce più facile il collocare i due palloni in un bagno d'acqua o dentro una scatola per proteggerli alquanto contro le cause che possono farne variare la temperatura. Se la chiusura dei coni smerigliati è resa ermetica mediante il mercurio, è utile che essi siano disposti col vertice in alto, perchè così si evita che questo mercurio sudicio o impuro possa cadere nell'interno dei palloni.

Per determinare con questo apparecchio la tensione del vapore acqueo dell'aria lo si fa oscillare lentamente, dopo avere tolto il tubo  $T$ , attorno all'asse che gli serve di sostegno, in modo che ciascun pallone alternativamente si riempia completamente di mercurio e di aria aspirata dall'esterno, poi quando l'apparecchio è inclinato in modo che uno dei palloni sia interamente pieno d'aria e l'altro di mercurio, si adatta il tubo  $T$  ai palloni procurando di non toccarli nè scaldarli e di non comprimervi l'aria nell'effettuare la chiusura, si osserva nel manometro la posizione del liquido, che dovrebbe essere ad uguale altezza in entrambi i rami, e si raddrizza lentamente l'apparecchio che poi si fa inclinare lentamente dal lato opposto; in tal modo il mercurio recandosi nel pallone che si abbassa, ne scaccia tutta l'aria spin-gendola attraverso il tubo  $T$ , ove essa striscia sull'acido solforico, nel pallone che s'innalza e si vuota di mercurio. Se il tubo  $T$  è abbastanza lungo, può forse bastare quest'unico passaggio dell'aria perchè essa ceda tutto il suo vapore (ad eccezione di una piccola frazione costante rimasta coll'aria nei tubi ed in cima ai palloni), converrà tuttavia assicurarsene raddrizzando nuovamente l'apparecchio ed inclinandolo dal lato opposto tante volte quante occorrono perchè il liquido nel manometro rimanga stazionario, o varii pochissimo regolarmente o irregolarmente per effetto della variazione regolare o irregolare della temperatura ambiente.

È necessario che il tubo  $T$  abbia dappertutto una sezione piuttosto ampia o almeno non capillare, per evitare i fenomeni termici derivanti dalla compressione e dilatazione dell'aria e dalla perdita di moto per attrito.

Nell'apparecchio da me usato i palloni erano ciascuno di  $200 \text{ cm}^3$  di capacità, il tubo inferiore che li congiungeva era lungo nel tratto orizzontale circa 30 cm. ed aveva il diametro interno di circa 8 mm., il tubo  $T$  invece era lungo fra le bolle circa 15 cm. ed aveva il diametro interno di 7 mm.; la quantità d'acido solforico, 3 a 4  $\text{cm}^3$ , era tale che essa scorreva da una

bolla all'altra quando l'apparecchio veniva inclinato, senza che mai riempisse completamente la sezione del tubo e senza che potesse mai essere trascinato dall'aria nei tubi verticali e nei palloni. D'altra parte anche la quantità di mercurio era regolata in modo che esso, quando un pallone arrivava nella posizione più bassa, non potesse neppure per inerzia e per la velocità acquistata schizzare entro il tubo  $T$ . Occorrevano di solito due o tre semioscillazioni, della durata complessiva di due o tre minuti primi, perchè tutto il vapore fosse assorbito; l'effetto della variazione della temperatura ambiente in questo breve intervallo di tempo era di solito trascurabile.

Sarebbe stato facile aumentare la superficie di contatto dell'acido coll'aria, collocando per es. entro il tubo  $T$  lunghe striscie di vetro, o delle palline di vetro che rotolassero da una estremità all'altra del tubo quando esso veniva inclinato, oppure finalmente dando al tubo congiungente le due bolle la forma di sinusoida col piano orizzontate, sarebbe così diminuita la durata dell'assorbimento del vapore che però m'è parsa sufficientemente breve. Invece non mi pare affatto conveniente riempire il tubo  $T$  con pezzetti di pomice i quali tengono racchiuso nelle loro cavità l'acido solforico concentrato mentre sulla superficie attiva l'acido si diluisce rapidamente, mentre invece usando corpi non porosi l'acido viene continuamente ed interamente rimescolato e la diluizione superficiale non è diversa da quella interna.

La variazione di pressione indicata dal manometro non rappresenta esattamente la tensione cercata del vapore acqueo, perchè questa tensione viene soppressa, per effetto dell'assorbimento del vapore, solamente nei palloni e non nel tubo  $T$  che non contiene vapore. Se  $V$  è il volume dell'aria nei palloni ove  $x$  è la tensione del vapore, e se  $v$  è il volume dell'aria secca nel tubo  $T$ , essendo  $H$  la pressione, per effetto dell'assorbimento del vapore si ha un volume  $V + v$  d'aria secca alla pressione  $H - x$  più un volume  $v$  pure d'aria secca alla pressione  $x$ ; quest'ultimo distribuendosi uniformemente in tutto il volume disponibile  $V + v$  vi produrrà un aumento  $vx : (V + v)$  di pressione e la pressione uniforme risultante sarà  $H - x + \frac{v}{V + v} x$ ; e se la variazione di pressione prodottasi è  $h$ , sarà:

$$x = h \left( 1 + \frac{v}{V} \right)$$

Perchè questa variazione  $h$  della pressione sia indicata esattamente dal manometro, occorre ancora che il livello interno del liquido nel manometro non abbia variato, ciò che può ottenersi in due modi cioè: togliendo liquido dal manometro con un'apposita disposizione pratica in modo che mentre il livello interno rimane fermo, quello esterno s'abbassi, oppure esercitando sul ramo libero del manometro una rarefazione, misurata da un secondo

manometro, tale da ricondurre alla posizione iniziale entrambi i livelli del primo manometro che così serve solo d'indicatore.

Se invece si lascia che il liquido del manometro unico obbedisca alla rarefazione prodotta dall'assorbimento del vapore, esso accuserà una pressione  $h'$  diversa da  $h$  perchè il livello interno sollevandosi avrà causato una diminuzione  $13,6 \cdot h' s : 2d \text{ cm}^3$  del volume dell'aria, se  $s$  è la sezione interna di ciascun tubo del manometro, e la legge di Boyle ci darà:

$$(V + v)(H - h) = \left( V + v - \frac{13,6}{2d} h' s \right) (H - h')$$

ossia:

$$h = h' \left( 1 + \frac{13,6}{2d} \frac{s(H - h')}{V + v} \right)$$

Questa correzione è assai maggiore della precedente, così p. es.: se fosse:  $d = 1$ ,  $s = 0,10 \text{ cm}^2$ ,  $H - h' = 75 \text{ cm}$ ,  $V + v = 200 \text{ cm}^3$ , s'avrebbe  $h = h' \left( 1 + \frac{1}{4} \right)$ . Non è possibile diminuirla usando nel manometro mercurio invece di olio perchè l'aumento della sezione dei tubi, reso necessario per rendere trascurabili gli errori di capillarità, compenserebbe la diminuzione degli spostamenti del livello interno.

Un terzo modo, oltre i due precedentemente indicati, per render nulla questa correzione o almeno per diminuirla molto, è il seguente che si può applicare molto facilmente. Prima d'incominciare la determinazione, quando il tubo  $T$  non è ancora adattato ai palloni, che perciò comunicano coll'aria esterna, si esercita pel ramo libero del manometro una certa compressione  $h''$  all'incirca uguale a quella  $h$  che si cerca e che si può o dedurre da una determinazione preliminare, oppure congetturare alla meglio, e si chiude il ramo libero del manometro rendendo così immobile il liquido che presenta un dislivello corrispondente alla pressione  $h''$ . Si adatta il tubo  $T$ , si fa assorbire completamente il vapore dall'acido solforico in modo che l'aria prenda la pressione  $h$  cercata, e si riapre il ramo libero del manometro.

Se per combinazione fosse esattamente  $h'' = h$  il dislivello rimarrebbe invariato, di solito però esso varierà, indicherà una pressione  $h'$  diversa da  $h''$  e sarà:

$$h = h' + \frac{13,6}{2d} \frac{H - h'}{V + v} s(h' - h'') = h' \left( 1 + \alpha \frac{h' - h''}{h'} \right)$$

indicando con  $\alpha$  il coefficiente approssimativamente costante

$$13,6 (H - h') s : 2d (V + v).$$

La tensione cercata del vapore sarà in definitiva

$$x = h' \left( 1 + \frac{v}{V} \right) \left( 1 + a \frac{h' - h''}{h'} \right)$$

o con molta approssimazione

$$x = h' \left( 1 + \frac{v}{V} + a \frac{h' - h''}{h'} \right)$$

che vale anche nel caso precedentemente considerato che sia  $h'' = 0$ .

Quando occorre tener conto esatto delle variazioni di volume dell'aria, causate dagli spostamenti del liquido nel manometro, bisogna dopo un abbassamento del livello aspettare che l'eccesso di liquido rimasto aderente alle pareti colo tutto giù, ciò che per l'olio ed altri liquidi viscosi richiede parecchi minuti, poichè altrimenti la sezione del tubo ne è diminuita ed il volume vero dell'aria è minore di quello apparente; è bene anzi evitare di dover osservare la pressione dopo un abbassamento del livello interno.

Questo strumento può essere costruito anche con due palloni (o boccette) comuni, chiusi da due buoni tappi uno con due, l'altro con tre fori; per l'uno di questi si fanno penetrare fino in fondo dei palloni i lati di un tubo non sottile piegato a doppia squadra, per l'altro foro penetrano nei tappi, ma non nel pallone due corti tubi aperti ai quali si congiungono le estremità del tubo  $T$  suddetto. Queste congiunzioni devono esser fatte preferibilmente nel modo sopra indicato, con tubi smerigliati, ma possono altresì esser fatte mediante corti tubi di gomma; perchè sia facile il collocarli e toglierli questi devono essere a parete spessa e piuttosto larghi dimodochè i tubi di vetro vi penetrino molto facilmente, e la chiusura poi viene resa perfetta mediante tubi conici di vetro o metallo esterni ai tubi di gomma i quali possono esser serrati da essi. Per il terzo foro d'uno dei tappi passa il tubo capillare che comunica col manometro.

Questi palloni vengono riempiti per metà di mercurio, poi aspirando o comprimendo l'aria in uno di essi si fa che il mercurio salga nel tubo di comunicazione e lo riempia a modo di sifone. Questa forma d'apparecchio quindi differisce dalla precedente solo perchè il passaggio del mercurio da un pallone all'altro si fa per mezzo d'un sifone.

Un'utile aggiunta ad entrambe queste forme di apparecchio si è quella di un rubinetto a tre vie fra ciascun pallone ed il tubo  $T$ , poichè se dopo eseguita una determinazione si chiude mediante i rubinetti la comunicazione dei palloni col tubo  $T$  e si apre invece quella dei medesimi coll'atmosfera si può, inclinando e raddrizzando nel modo solito l'apparecchio, scacciare l'aria secca, sostituirla con aria esterna e ristabilendo le comunicazioni primitive col tubo  $T$  eseguire una nuova determinazione senza staccare il tubo

*T* e senza perturbare menomamente le condizioni dell'apparecchio. Per questa seconda determinazione, la prima delle suddette correzioni diviene quasi nulla, cioè se  $h_1$  ed  $h_2$  sono le indicazioni del manometro nella prima e nella seconda determinazione, dovrà per questa prendersi invece come valore corretto

$$h_2 + \frac{v}{V} (h_2 - h_1).$$

Si può collocare nel tubo *T* invece di acido solforico una nota soluzione del medesimo, avente la tensione di vapore nota a tutte le temperature; in tal caso il manometro indicherebbe la differenza fra la tensione di vapore della soluzione e quella del vapor acqueo nell'aria, e se la prima fosse press'a poco uguale alla tensione media locale del vapore, questa differenza sarebbe talora positiva talora negativa, la soluzione assorbirebbe talora vapor acqueo, talora ne emetterebbe e potrebbe rimanere lungamente quasi inalterata.

Sarebbe invece nocivo l'uso dell'acqua invece dell'acido solforico poichè il vapore renderebbe umido il mercurio e le pareti interne dell'apparecchio che diverrebbe inadatto alle successive determinazioni.

Se si vuole adoperare questo apparecchio come igrometro chimico occorrerà evidentemente usare palloni di grande capacità, p. es. 1 litro, che potrebbero contenere olio invece di mercurio, oppure con palloni piccoli bisognerà ripetere l'operazione parecchie volte poichè il peso del vapore contenuto nell'aria è solo di circa 1 mgr. per litro e per millimetro di tensione.

Quest'apparecchio può finalmente servire anche per la determinazione della tensione di vapore nell'aria delle soluzioni nell'acqua di acido solforico o di sali; occorrerà a tale scopo, dopo privata l'aria di vapore mediante un tubo *T* con acido solforico, sostituirvi un simile tubo colla soluzione ed osservare l'aumento della pressione dell'aria operando nel modo già indicato.

Un altro modo di accelerare l'assorbimento del vapore è quello di agitar l'aria con una disposizione che proposi già per agitar i liquidi in recipienti chiusi, e che consiste nel fissare sulle pareti interne del recipiente alcune palette inclinate e far ruotare il recipiente alternativamente in sensi opposti.

L'apparecchio è rappresentato nella fig. 2; una boccetta a largo collo smerigliato di circa 250 cm<sup>3</sup> di capacità porta fissate con ceralacca su due lati opposti delle pareti interne, quattro palette inclinate di 45° sulla verticale e tutte parallele fra loro. Sul fondo della boccetta trovasi fissato un treppiede di grosso filo d'ottone entro il quale viene collocato stabilmente e ad un lato della boccetta un vasetto cilindrico, basso, coll'orlo spesso e piano, contenente un po' d'acido solforico, chiuso da un disco di vetro liscio o smerigliato e munito d'un'ansa o manico di filo d'ottone pel quale può esser preso con un uncino e collocato o tolto. La boccetta può esser chiusa perfettamente con un tappo di gomma con due fori, dei quali uno di piccolo

diametro che serve a stabilire occasionalmente la comunicazione coll'esterno può esser chiuso da un'astina conica di vetro, mentre l'altro è attraversato da un tubo che è ripiegato al disotto della boccetta e poi è in forma d'U, è graduato, contiene un liquido non votabile e funziona da manometro.

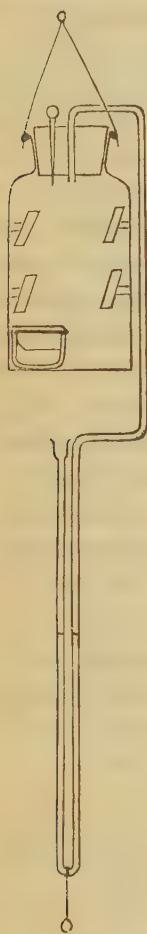


FIG. 2.

Affinchè la chiusura fosse perfetta senza serrare troppo il tappo questo era un po' ingrassato; se esso avesse la tendenza a sollevarsi, come spesso avviene ai tappi unti, lo si può fissare con un rettangolo verticale di grosso filo d'ottone e con un cuneo che si colloca o fra il fondo della boccetta ed il lato inferiore del rettangolo o fra il tappo ed il lato superiore. La boccetta era appesa per il collo mediante un doppio spago ad un'asta orizzontale fissa, un doppio spago era pure legato al fondo del manometro e pendeva da esso.

Per determinare la tensione di vapore dell'acqua operavo nel modo seguente: tolto il tappo, col manometro dalla boccetta rinnovavo in questa l'aria servendomi dei tubi d'un polverizzatore di liquidi, introducendo il tubo verticale fino al fondo della boccetta e soffiando fortemente con un gran soffietto nel tubo orizzontale. Poi introducevo e collocavo a posto entro la boccetta il vasetto tappato, coll'acido solforico, collocavo e fissavo il tappo col manometro lasciando aperto il forellino affinchè l'aria avesse la pressione esterna, chiudevo questo forellino ed inclinando la boccetta e dandole un colpetto secco, facevo sdruciolare giù il disco che chiudeva il vasetto che rimaneva così aperto e l'assorbimento del vapore incominciava. Per accelerarlo tenevo fermo colla mano sinistra lo spago inferiore mentre lo facevo girare fra il pollice e il medio della mano destra, dimodochè la boccetta ed il manometro rotavano molto rapidamente a modo di fuso attorno all'asse verticale di figura, ma in sensi alternati.

Questa rapida rotazione invertita non produceva inconvenienti; i due tubi del manometro erano connessi ed ugualmente vicini all'asse di rotazione, il vasetto era collocato stabilmente, l'acido solforico saliva bensì lungo le pareti, ma la sua quantità era regolata in modo che esso non giungesse mai fino all'orlo spinato.

Mentre senza rotazione l'aria dopo 24' conservava ancora vapor acqueo la cui tensione era di 1,5 mm. su 15 iniziali, mediante la rotazione l'assorbimento era completo in 6'; è bensì vero che a causa del piccolo diametro

del vasetto e dell'altezza della boccetta l'assorbimento per diffusione era eccezionalmente lento.

Ho preparato, ma non ancora costruito, un apparecchio nel quale l'assorbimento del vapore mediante la rotazione si compirà più rapidamente. Esso è formato da una piccola campana piuttosto bassa, tubulata in cima ed ivi chiusa dal tappo coi due fori uno attraversato dal tubo che porta il manometro, l'altro che può esser chiuso o aperto mediante un'astina. Sulle pareti della campana sono fissate molte palette, il vasetto viene collocato stabilmente sopra un disco di vetro spesso che si ricopre colla campana, unta come di solito nell'orlo inferiore. I vantaggi di questa disposizione sono che la campana può contenere numerose palette sulle pareti e su di un asse centrale, mentre nella boccetta doveva rimanere libero un grande spazio per il passaggio del vasetto. Questo può usarsi assai più largo poichè la campana è più bassa ma più larga della boccetta, però il suo diametro deve essere poco maggiore del raggio interno della campana affinchè il suo coperchio possa spostarsi lateralmente e lasciar scoperto il vasetto.

Ho fatto anche delle prove con piccoli ventilatori a palette collocati sul vasetto, ma finora senza grande vantaggio.

Esperienze comparative fra questi igrometri, un igrometro-bilancia ed il psicometro ad acqua acidulata potranno essere oggetto d'un prossimo studio.

**Fisica terrestre.** — *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate del 1900.* Nota di CIRO CHRISTONI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

**Chimica.** — *Sull'acido platinico (esa-ossi-platinico).* Nota di ITALO BELLUCCI presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

**Chimica organica.** — *Sopra l'acido veratroiliformico ed il suo prodotto di riduzione.* Nota di L. VANZETTI, presentata dal Socio G. KOERNER.

**Mineralogia.** — *La Greenockite nelle Miniere di Monteverecchio.* Nota del prof. DOMENICO LOVISATO, presentata dal Socio G. STRÜVER.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sull'epidoto del passo Bettolina, vallone di Verra.* Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio G. STRÜVER.

I cristalli di epidoto descritti nella presente Nota mi furono dati per istudio dall'ing. V. Novarese, al quale sono lieto di porgere anche qui i miei più vivi ringraziamenti. Sul loro giacimento l'ing. Novarese mi comunica cortesemente quanto segue:

« Sulla catena che separa la valle d'Ayas da quella di Gressoney, il valico più settentrionale che sia ancora indicato sulla carta dell'I. G. M. porta il nome di passo della Bettolina (2898 m.). Però a nord di questo, esiste ancora un'altro passaggio che fa comunicare l'alto vallone di Verra (Ayas) coi pascoli superiori della Bettolina, e che potrebbe chiamarsi passo della Bettolina N. (3157 m.).

« Quest'ultimo passo ha grande importanza geologica, perchè corrisponde al contatto di una potente zona di rocce verdi, che si adagia sui micascisti e gli gneiss del Monte Rosa. In vicinanza del passo, le rocce verdi sono rappresentate da una potentissima massa di serpentina contenente nuclei estesi di peridotite, e da un banco relativamente sottile di prasinite anfibolica che si insinua fra la serpentina ed i micascisti sottostanti. In vicinanza del passo, sul versante di Ayas, presso al contatto colle prasiniti, compaiono nella serpentina dei nuclei di una miscela di granato, epidoto, diopside, clorite, anfibolo e magnetite, e forse altri minerali ancora, solcati da filoncelli contenenti geodi, in cui i minerali predetti s'incontrano in cristalli ben sviluppati ».

L'epidoto si presenta in bei cristallini di colore giallo verdastro chiaro, accompagnati da rari cristallini molto imperfetti di diopside e da qualche lamella di clorite. Le loro dimensioni sono variabilissime: da cristalli che misurano meno di un millimetro, si va ad altri che raggiungono 7-8 mm. nella direzione dell'asse *y*. I più frequenti, però, raramente superano i 4 mm.

I cristalli da me esaminati sono abbastanza ricchi di forme, alcune delle quali in ispecial modo interessanti, sia perchè nuove per l'epidoto in genere, sia perchè assai rare negli altri giacimenti finora studiati. Tutte le forme osservate sono le seguenti:  $T = \{100\} \infty P_{\infty}^1$ ,  $M = \{001\} OP$ ,  $z = \{110\} \infty P$ ,  $o = \{011\} P \infty$ ,  $k = \{012\} \frac{1}{2} P \infty$ ,  $\{22.0.1\} = 22 P_{\infty}^1$ ,  $\star \{801\} = 8 P \frac{1}{2}$ ,  $\star \{501\} = 5 P_{\infty}^1$ ,  $g = \{301\} = 3 P_{\infty}^1$ ,  $h = \{201\} = 2 P_{\infty}^1$ ,  $e = \{101\} = P_{\infty}^1$ ,  $l = \{\bar{2}01\} 2 P_{\infty}^1$ ,  $\{\bar{7}05\} \frac{7}{5} P_{\infty}^1$ ,  $\chi = \{\bar{3}02\} \frac{3}{2} P_{\infty}^1$ ,  $\beta = \{\bar{4}03\} \frac{4}{3} P_{\infty}^1$ ,  $\{\bar{4}\bar{9},0,50\}$ .

$\frac{49}{50} P_{\infty}^1$ ,  $r = \{101\} P_{\infty}^1$ ,  $i = \{102\}_{1/2} P_{\infty}^{\frac{1}{2}}$ ,  $d = \{111\} - P$ ,  $n = \{111\} P$ ,  
 $q = \{221\} 2P$ . Si hanno dunque 21 forme semplici, delle quali due nuove.

L'ortopinacoide  $\{100\}$  si rinviene in tutti i cristalli, e spesso è dominante: le sue facce sono talvolta piane e regolari, ma spesso sono invece profondamente striate parallelamente all'asse  $y$ . In molti cristalli le sue due facce sono di grandezza assai diversa. È caratteristico il fatto che sovente  $\{100\}$  diventa subordinata, e viene sostituita da numerosi emiortodomi negativi, che qualche volta presentano delle facce molto grandi. Questi emiortodomi in alcuni casi sono lontani diversi gradi dalla posizione di  $\{100\}$ , ma più spesso non ne differiscono che di pochissimi gradi.

La base  $\{001\}$  è anch'essa presente in tutti i cristalli, ma è quasi sempre piuttosto piccola.

$\{22.0.1\}$  ha permesso una buona misura in un solo cristallo, nel quale aveva una faccia piccola, ma netta e senza striatura. È questo l'unico emiortodoma negativo vicinale a  $\{100\}$  che si è potuto determinare esattamente. Negli altri cristalli nei quali pure si osservarono questi emiortodomi vicinali all'ortopinacoide, e spesso con grandi facce, non è stata possibile una misura esatta dell'angolo che essi fanno con la base, perchè sono profondamente striati e danno quindi immagini multiple. Per determinare rigorosamente il loro simbolo sarebbero state necessarie delle misure esattissime, perchè per queste forme vicinali basta una differenza di pochi minuti primi, per cambiare considerevolmente il simbolo.

Nuovi per l'epidoto sono  $\{801\}$  e  $\{501\}$ . Sono stati osservati in uno stesso cristallo, il primo con una faccia piuttosto piccola, ma che ha fornito una misura esatta, l'altro con una faccia grande, ma poco buona. Ad ogni modo, come risulta dagli angoli che seguono, non può cader dubbio sul simbolo di queste due nuove forme:

$$\begin{array}{lll} (001) : (801) = 59^\circ 16' \text{ mis.} & & 59^\circ 12' \text{ calc.} \\ : (501) = 56 & " & 56 14 " \end{array}$$

Costanti in tutti i cristalli sono  $\{101\}$  e  $\{201\}$ , il che costituisce un'altra caratteristica di questo interessante epidoto.  $\{101\}$  ha facce ora molto piccole, ora discretamente grandi:  $\{201\}$  le ha invece sempre piccole.  $\{201\}$ , benchè conosciuto da lungo tempo (è stato scoperto dal Lévy), non è molto frequente nell'epidoto: si trova, infatti, in pochi dei molti giacimenti finora studiati. Su 89 giacimenti non si trova che in 16, ed in nessuno è costante come nei cristalli del Passo Bettolina.

Piuttosto raro è, invece,  $\{301\}$ , che presenta sempre delle faccette assai piccole. È questa una forma rarissima nell'epidoto: fu scoperta da Kokscharow (<sup>1</sup>) nella pistazite di Achmatowsk, ed è stata poi osservata da J.

(<sup>1</sup>) *Materialeen zur Mineralogie Russlands*, vol. 3, pag. 279, 307.

Gränzer (<sup>1</sup>) in quelli della Habachthal e da me in quelli della Sulzbachthal (<sup>2</sup>).

Degli emiortodomi positivi  $\{1\bar{0}1\}$  si rinviene in tutti i cristalli, e con facce per lo più discretamente grandi: tutti gli altri sono rari e non mostrano che facce sottili. Interessanti sono  $\{\bar{7}05\}$  e  $\{4\bar{9}0.50\}$ , due forme molto rare nell'epidoto. La prima è stata scoperta da Bücking (<sup>3</sup>) nei cristalli della Sulzbachthal, la seconda da G. Flink (<sup>4</sup>) in quelli di Nordmarken, e, per quel che mi consta, non erano state finora riscontrate in altri giacimenti. Un po' più frequenti nell'epidoto sono  $\{\bar{3}02\}$  e  $\{\bar{4}03\}$ , che nei cristalli del passo Bettolina sono state osservate pochissime volte e sempre con faccette piccolissime.  $\{\bar{3}02\}$  fu scoperta da Marignac nei cristalli del Delfinato, ed è stata poi ricordata da v. Tarassov (<sup>5</sup>) (Rothenkopf), da Bücking (Sulzbachthal), da Weinschenk (<sup>6</sup>) (Oberhollersbachthal) e da Lüdecke (<sup>7</sup>) (Fellialp).  $\{\bar{4}03\}$ , scoperta dal Kokscharow nell'epidoto di Achmatowsk non era stata più trovata che dal Tarassov e dal Bücking (Sulzbachthal e Traversella).

Tra le forme laterali  $\{\bar{1}11\}$  è sempre la dominante. Presente in tutti i cristalli è anche  $\{110\}$ , con facce di grandezza molto variabile. Quasi sempre si rinviene poi  $\{011\}$ , con faccette ora piccolissime, ora discretamente grandi. Rara e sottile è  $\{012\}$ . Le due emipiramidi  $\{111\}$  e  $\{\bar{2}\bar{2}1\}$  sono abbastanza frequenti, ma quasi sempre piccole, e  $\{111\}$  è spesso piccolissima.

Tutti i cristalli sono più o meno allungati secondo  $[y]$  e tabulari secondo  $\{100\}$ . Sono anche però frequenti i cristalli prismatici secondo l'asse  $[y]$ . La combinazione che essi più spesso presentano è  $\{100\} \{001\} \{101\} \{201\} \{\bar{1}01\}$  e, come forme laterali,  $\{\bar{1}11\}$ ,  $\{110\}$  e  $\{011\}$ . A queste si aggiungono spesso  $\{\bar{2}21\}$  e  $\{111\}$ . La fig. 1 rappresenta uno dei tipi più frequenti: la fig. 2 (<sup>8</sup>) il cristallo che ha offerto le due nuove forme  $\{501\}$  e  $\{801\}$ .

I cristalli sono sovente asimmetrici: non ne mancano però di regolarità quasi perfetta.  $\{100\}$ ,  $\{001\}$  e  $\{\bar{1}01\}$  non hanno quasi mai le loro due facce

(<sup>1</sup>) *Krystallographische Untersuchung des Epidot aus dem Habach- und dem Krimler Achenthale*. Tschermak's min. u. petrag. Mitth. 1888. vol. 9, pag. 361.

(<sup>2</sup>) *Ueber zwei flächenreiche Epidotkrystalle von Sulzbach*, Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. s. w. 1900, vol. 1.

(<sup>3</sup>) *Ueber die Krystallformen des Epidot*. Zeitsch. f. Kryst. 1878, vol. 2, pag. 320.

(<sup>4</sup>) *Mineralogiska Notiser I. 11. Epidot, från Nordmarken*. Bihang till. k. Svenska Vet. Akad. Handlingar 1886, vol. 12, n. 2.

(<sup>5</sup>) *Messungen rother Epidotkrystalle vom Rothenkopf am Schwarzenstein in Tirol*. Verhandl. russ. min. Gesellsch. St. Petersburg 1873 (2) vol. 8, pag. 1.

(<sup>6</sup>) *Die Minerallagerstätten des Gross-Venedigerstocks*. Zeitsch. f. Kryst. 1896, vol. 26, pag. 337.

(<sup>7</sup>) *Die Minerale des Harzes*. Berlin 1896.

(<sup>8</sup>) Nel cristallo della fig. 2 la faccia  $\{100\}$  è di sfaldatura.

ugualmente grandi: le differenze sono specialmente forti per le facce di  $\{100\}$  e  $\{001\}$ .

Non solo per estensione, ma anche per lo stato fisico le due facce di queste forme sono fra loro diverse; così non è raro il caso di trovare in un cristallo una faccia di  $\{100\}$  profondamente striata, mentre l'altra è perfettamente piana e regolare.

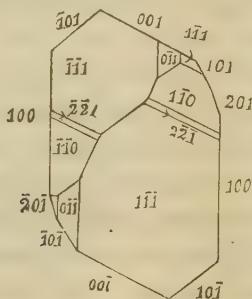


FIG. 1.

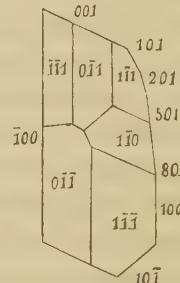


FIG. 2.

Gli angoli misurati sono in accordo soddisfacente con quelli calcolati partendo dalle costanti di Kokscharow:

$$a:b:c = 1.5807 : 1 : 1.8057$$

$$\beta = 64^\circ 36'$$

Spigoli misurati	Angoli trovati (Media)	Calcolati
(001) : (100)	64° 36' 40"	64° 36'
: (101)	34° 40' 10"	34° 42'
: (10̄1)	63° 38'	63° 42'
(100) : (201)	18° 25'	18° 25'
: (110)	54° 58'	55°
: (111)	49° 48' 40"	49° 53'
: (011)	76° 58'	77° 2¹/₂
(10̄0) : (111)	69° 5' 30"	69° 4'
(001) : (012)	39° 15'	39° 12'
: (110)	75° 47' 10"	75° 45'
: (221̄)	90° 19' 30"	90° 18'
: (111̄)	75° 8' 20"	75° 12'
(110) : (221̄)	14° 31'	14° 33'
: (111̄)	29° 0' 40"	29° 3'
(10̄1) : (111̄)	54° 49' 30"	54° 47¹/₂

In un precedente lavoro (<sup>1</sup>) ho dato l'elenco di tutte le forme fino allora conosciute nell'epidoto. Alle 299 forme ricordate sono da aggiungere le due

<sup>(1)</sup> Krystallographisches über den Epidot. Zeitsch. f. Kryst. 1902, vol. 37, pag. 1.

emipiramidi {544} e {755} scoperte dal Palache, nei cristalli dell'Alaska, ed i due nuovi emiortodomi negativi {801} e {501} descritti in questa Nota. Con queste, le forme finora note nell'epidoto salgono a 303, così divise:

3 pinacoidi		27 emipiramidi	{ $\bar{h}kk$ }
7 prismi		5 "	{ $hkk$ }
21 clinodomi		20 "	{ $hkl$ } e { $\bar{h}kl$ }
7 emipiramidi	{ $hhl$ }	117 emiortodomi	positivi { $\bar{h}ol$ }
15 "	{ $\bar{h}hl$ }	57 "	negativi { $hol$ }
24 "	{ $\bar{h}kh$ }		

**Psicologia sperimentale.** — *Contributo allo studio del tempo di reazione delle sensazioni gustative* (<sup>1</sup>). Nota del prof. FEDERICO KIESOW, presentata dal Socio A. Mosso.

Se si confrontano fra loro i tempi di reazione ottenuti da von Vintschgau e Hönigschmied per stimoli gustativi in diversi soggetti (<sup>2</sup>), colpiscono subito le grandi differenze personali che si trovano fra i valori medi. Come esempio presento la seguente tabella tolta dal lavoro di von Vintschgau nel Handbuch der Physiologie di Hermann (<sup>3</sup>). Essa dà i valori medi trovati in tre individui per la punta della lingua, dopo l'eliminazione di tutti gli esperimenti incerti:

	Gli esperimenti furono eseguiti sopra		
	H.	Dott. D.	Fu.
Contatto . . . . .	0,1507	0,1251	0,1742
Cloruro di Sodio . . . . .	0,1598	0,597	—
Saccarosio . . . . .	0,1639	0,752	0,3502
Acido . . . . .	0,1676	—	—
Chinino . . . . .	0,2196	0,993	—

Il numero delle singole osservazioni dalle quali questi valori risultarono (<sup>4</sup>), era, per le reazioni gustative, come segue:

	H.	Dott. D.	Fu.
Cloruro di sodio . . . . .	57	17	—
Saccarosio . . . . .	56	15	22
Acido . . . . .	61	—	—
Chinino . . . . .	64	14	—

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino, sezione di Psicologia sperimentale.

(<sup>2</sup>) M. v. Vintschgau u. G. Hönigschmied, Pflügers Archiv., vol. X, pag. 1, 1875.

(<sup>3</sup>) M. v. Vintschgau, Hermanns Handbuch, vol. III, 2, pag. 205.

(<sup>4</sup>) Op. cit., pp. 42-44.

Le differenze fra questi valori medi, che gli autori ritengono esatti, sono di fatto addirittura enormi. Tali differenze non sogliono verificarsi in condizioni normali. Non conosciamo differenze analoghe se non fra le determinazioni di tempo per stimoli olfattivi; anche in tal caso, però, sono, secondo le ricerche finora fatte (<sup>1</sup>), sempre meno notevoli di quelle sopracitate.

Che queste deviazioni non dipendano dal tipo al quale i soggetti appartenevano, risulta dai tempi di reazione che gli autori ottennero per l'eccitamento tattile. In questo caso, il tempo per il dott. D. è più piccolo che per H., mentre i valori di tempo rispetto ai gusti sono, per il primo, assai più elevati che per il secondo. Parimente Fu. reagisce allo stimolo tattile più lentamente che il dott. D. e, nondimeno, il tempo di reazione per lo zucchero in Fu. è di oltre 400<sup>σ</sup> (<sup>2</sup>) più breve che nel dott. D. Queste grandi differenze debbono essere, quindi, dipendenti da altri fattori.

Desideroso di avere più esatte conoscenze a tale riguardo, e soprattutto di sapere come si possano comportare i tempi di reazione a stimoli gustativi in rapporto alla differenza, stabilita da L. Lange nel laboratorio di Wundt, fra la reazione muscolare e la sensoriale (<sup>3</sup>), ho fatto eseguire dal dott. A. Fontana alcuni esperimenti per i quali io stesso servivo da soggetto.

Abbiamo lavorato con un apparecchio d'applicazione analogo a quello adoperato da von Vintschgau e Höngschmied. Il pennello usato era morbido e senza punta. Bagnato con una sostanza sapida, esso presentava un diametro di circa 2 mm. Le disposizioni per gli esperimenti erano, quanto al resto, in tutti i punti essenziali, le medesime di quelle indicate nella mia precedente comunicazione. Esistevano solo queste differenze: il segnale veniva dato nella stanza d'osservazione e lo sperimentatore riceveva pure da detta stanza un avviso acustico per mettere l'orologio in movimento. Per quanto riguarda i singoli valori, si scartavano, anche qui, solo quelli che l'osservatore segnalava.

Le sostanze sapide adoperate erano soluzioni acquose di cloruro di sodio (satura), saccarosio (50 %), acido cloridrico (0,4 %) e solfato di chinina (satura). Dopo un esercizio precedente, si fecero per ognuna di queste sostanze 50 determinazioni. Era la punta della lingua che veniva stimolata su una superficie che, anche nel nostro caso, era di 1 cm<sup>2</sup> circa. La reazione si faceva nel momento in cui si aveva il primo accenno della sensazione. Il soggetto sapeva sempre quale sostanza veniva applicata.

Da questi esperimenti risultò che non si può reagire a stimoli gustativi altrimenti che in modo sensoriale; che una reazione muscolare, colla disposizione d'esperimento descritta più sopra, è assolutamente impossibile. Ciò

(<sup>1</sup>) Cfr. W. Wundt, *Grundzüge der physiol. Psychologie*, 5<sup>a</sup> ediz. vol. III, pag. 432.

(<sup>2</sup>) 1<sup>σ</sup> = 0,001 min. sec.

(<sup>3</sup>) L. Lange, *Philos. Stud.*, vol. IV, 1888, pag. 479.

che io ho osservato in questa serie d'esperimenti corrisponde nei tratti essenziali a quanto Wundt ha scritto sui tempi di reazione risultanti dall'applicazione di stimoli di soglia e di quelli vicini alla soglia (<sup>1</sup>). Io sono in grado di confermare queste osservazioni per quanto riguarda le impressioni tattili ed acustiche. Avvicinandosi alla soglia in questi campi di sensazione, mediante una graduale diminuzione dell'intensità dello stimolo, la reazione muscolare si fa man mano più difficile, e diventa, infine, assolutamente impossibile, cosicchè da ultimo è possibile la sola reazione sensoriale. Vicino alla soglia e specialmente alla soglia si trovano valori assai alti e parimenti una variazione media alta. Così, Wundt trovò da 24 singole osservazioni, fatte su stimoli di valore di soglia, per impressioni di suono, di luce e di tatto, tempi eguali a 337, 331 e 327<sup>o</sup>, con variazioni medie di 50, 57 e 32 (<sup>2</sup>). Si è costretti già prima di raggiungere la soglia, di concentrare l'attenzione, con grande sforzo, esclusivamente sull'impressione da aspettarsi, per afferrare il momento nel quale la sensazione emerge nella coscienza. Simultaneamente si osserva una notevole incertezza nel reagire, ed inoltre, io mi accorsi sempre che tali esperimenti mi stancavano assai.

Ora, simili furono le mie osservazioni nella ricerca in questione, colla sola differenza che riuscì ancora più difficile di afferrare la sensazione. È un fatto, che la sensazione gustativa, quand'anche venga suscitata da stimoli fortissimi, non si manifesta ad un tratto, come, per es. è il caso per forti stimoli tattili ed uditive, ma cresce pure una certa lentezza, annunciandosi nel sensorio con un *minimum* di intensità. (A questo riguardo noto, però, che le diverse qualità di sapori, si comportano diversamente). È difficilissimo riconoscere con esattezza questo momento, il quale per l'appunto deve determinare il movimento di reazione.

Gli esperimenti fatti su di me diedero i valori seguenti che tolgo dal protocollo del dott. Fontana :

Sostanza sapida	Med. arit.	Var. med.
Cloruro di sodio . . . . .	307,66 <sup>o</sup>	43,3188
Saccarosio . . . . .	446,18 <sup>o</sup>	32,9956
Acido cloridrico . . . . .	536,06 <sup>o</sup>	75,9072
Chinino . . . . .	1081,94 <sup>o</sup>	138,7904

Come si vede, i valori medi sono tutti piuttosto elevati e la variazione media è, pure, notevolissima. Rammentando, dunque, la crescente incertezza nel reagire già menzionata, troviamo, infatti, una corrispondenza fra questi risultati e quanto fu detto poco sopra sulle reazioni eseguite su valori di soglia. Aggiungo che la reazione per il chinino mi riuscì straordinariamente difficile e che l'incertezza era molto marcata. Questo è dimostrato dal fatto

(1) W. Wundt, *Grundzüge ecc*, 5<sup>a</sup> ediz., vol. III, pag. 428.

(2) Ibid., pag. 429.

che tanto il valore medio quanto la variazione media sono i più alti. Quanto al resto, i valori seguono, anche qui, l'ordine stabilito circa cinquant'anni fa dallo Schirmer (<sup>1</sup>) nei suoi esperimenti fatti con delle miscele di sostanze sapide sulla punta della lingua e che si ritrova anche nei valori medi dell'osservatore dott. D. (in parte anche in quelli dell'osservatore H.) nella tabella di v. Vintschgau.

Trovai pure valori alti quando il dott. Fontana serviva da soggetto. In causa della mancanza d'esercizio però, questi erano molto irregolari, quindi resta inutile comunicarli. Noto solo che, malgrado ciò, nei fatti generali arrivammo alla medesima conclusione.

Se si dividono gli osservatori di v. Vintschgau e Hönigschmied in gruppi secondo i loro tempi di reazione, troviamo due di questi gruppi: uno, a cui appartiene il solo H. coi suoi valori bassi, e l'altro, composto del dott. D. e di Fu., dei quali i tempi di reazione sono molto alti. A quest'ultimo gruppo apparterremmo pure il dott. Fontana ed io stesso. Ed ora ci troviamo di nuovo davanti alla necessità di cercare la causa delle grandi differenze nei valori di questi due gruppi.

Ho già detto che non possono derivare dal tipo a cui appartengono i soggetti e non ho bisogno di insistere in proposito. Ma si potrebbe credere a condizioni *anatomo-fisiologiche*, come per es. che gli organi periferici nella superficie stimolata fossero, nei diversi soggetti, diversamente distribuiti. Certo, ciò potrebbe dar origine a differenze nei valori di tempo, come quelle, infatti, che troviamo fra gli osservatori del secondo gruppo. Ma per quanto grandi siano le deviazioni, i tempi si possono, nondimeno, paragonare ancora sempre fra di loro. E poichè so, da altre ricerche, che io stesso posseggo un organo gustativo perfettamente normale, stento a credere che le sorprendenti differenze fra i valori di H. e quelli di tutti gli altri osservatori si possano riferire esclusivamente a tali cause.

Faccio, quindi, un tentativo di spiegazione in un'altra direzione. Prima di tutto, noto che, in esperimenti come quelli dei quali parliamo, non abbiamo da fare con processi semplici, ma con processi complicati.

Siccome la punta della lingua è di una sensibilità tattile squisita, il contatto del pennello si sente intensamente, e quantunque il soggetto cerchi di concentrare l'attenzione sulla sensazione gustativa da aspettarsi, l'impressione persistente prodotta dal pennello invade talmente la sua coscienza che il suo compito diventa quello di *distinguere* il primo debolissimo accenno della sensazione gustativa da quella tattile.

(<sup>1</sup>) R. Schirmer, Deutsche Klinik 1859, XI, nn. 13, 15, 18: *Nonnullae de gustu disquisitiones*. Diss. inaug. Gryphiae 1856; M. v. Vintschgau, op. cit. Hermanns Handbuch pp. 157 e 204.

Ricordo, poi, che, prima che la qualità di una sostanza sapida diventi riconoscibile, abbiamo sovente una sensazione indefinibile che giudichiamo vagamente come gustativa senza che possiamo accertarne la qualità.

In ultimo rammento che i singoli gusti sono accompagnati da impressioni, che io, tempo addietro, chiamai semplicemente impressioni tattili, ma che ora sono disposto, in seguito a continue osservazioni, ad attribuire *in parte* ad eccitazione di terminazioni nervose libere, e a considerare come una manifestazione specifica della sensazione dolorifica. (Basta ricordare le sensazioni che accompagnano il gusto di acidi). Poichè queste sensazioni possono manifestarsi, come si osserva in determinazioni di soglia, già prima della sensazione gustativa, è supponibile che esse esercitino la loro azione anche in casi come quelli sopra descritti. Esse variano, inoltre, secondo i diversi sapori, e sono, talvolta, siffatte che, in seguito ad influenze associative, permettono di riconoscere la sensazione gustativa già prima che questa sia sorta nella coscienza. Non voglio asserire che ciò succeda sempre, ma è un fenomeno che io, più volte, ho osservato.

Se prendiamo in considerazione che anche i soggetti in questione sapevano sempre quale sostanza sapida veniva applicata, sembra possibile che i fattori accennati abbiano influito sui tempi di reazione, in parte prolungandoli ed in parte abbreviandoli.

Ora, che il primo di questi fattori abbia, infatti, esercitato una influenza sopra gli sperimentatori di v. Vintschgau e Hönigschmied, emerge dai valori medi che gli autori ottennero nel dott. D. quando una sua papilla circonvallata (al lato destro) veniva stimolata. Questi valori erano i seguenti (<sup>1</sup>):

Contatto . . . . .	0,1409
Cloruro di sodio . . . . .	0,543
Saccarosio . . . . .	0,552
Chinino . . . . .	0,502

Vediamo che il tempo di reazione rispetto all'impressione tattile è aumentato (e ciò corrisponde perfettamente alla minore sensibilità tattile della parte posteriore della lingua) ma che esso è diminuito rispetto ai gusti. Quanto alla sensazione dell'amaro, data la maggior sensibilità della parte posteriore della lingua a questo sapore, questa diminuzione era da aspettarsi, ma non parimenti quella rispetto alle altre sensazioni gustative. Sappiamo che la punta della lingua ha la maggior sensibilità alle sostanze dolci, e pure, la reazione al dolce è di 200° più breve alla parte posteriore della lingua che non alla punta. Ancora, su tutte le superficie della lingua capaci di sentire il gusto esiste una sensibilità approssimativamente uniforme per il sale, nondimeno, il tempo di reazione a questa sostanza è, alla parte posteriore della lingua, sempre ancora di 0,054 min. sec. più breve che alla punta.

(<sup>1</sup>) V. Vintschgau, op. cit., pag. 205.

Mi sembra giustificata, perciò, l'ipotesi che queste diminuzioni di tempi siano da spiegare come dovute all'influenza esercitata dall'impressione tattile sulla reazione.

Si capisce senz'altro che il secondo dei fattori sopraccennati può, inconsapevolmente, determinare una reazione innanzi tempo, ma non si deve confondere questo stadio preliminare della qualità da aspettarsi con casi nei quali, data una certa disposizione d'esperimento, la sensazione, per cause fisiologiche, non si sviluppa completamente. In tali casi un prolungamento del tempo può manifestarsi. Così, si vede dalle osservazioni del dott. D., riassunte con grande cura dagli autori, che valori di tempo fino a circa 7 min. sec. possono verificarsi. Queste tabelle sono preziose. Esse confermano in ogni particolare ciò che ho detto più sopra dell'incertezza nelle reazioni a stimoli gustativi e specialmente al chinino.

Che l'ultimo dei fattori sotto discussione possa, all'insaputa del soggetto, determinare una diminuzione del tempo di reazione, non esige, a quanto mi sembra, una ulteriore dimostrazione.

Volendo ora riassumere le cognizioni acquistate colle sopradescritte mie ricerche, mi sembra di non poter fare a meno di considerare i tempi di reazione *più lunghi*, nei lavori finora fatti, come quelli più *esatti*. Se esamino i piccolissimi valori di tempo del soggetto H. sono portato a credere che le sue reazioni siano state eseguite, all'insaputa del soggetto stesso, troppo presto. Non pare per es. verosimile, che la differenza fra i valori di tempo per impressioni tattili e quelle gustative del sale, sia soltanto di 0,0091 min. sec. alla punta della lingua. Trovo, inoltre, le differenze fra i tempi di reazione al sale, all'acido e allo zucchero in H. non grandi abbastanza per dar risalto alla legge di Schirmer. Tutt'al più si può trovare, in questi valori, un vago accenno a questa legge, ma non si oserebbe dedurla da essi, se non fosse di già conosciuta. Essa risulta un po' più chiaramente dalle osservazioni di H. se, invece dei valori medi cosiddetti corretti, si considerino le medie totali. Queste sono (1):

Cloruro di sodio . . . . .	0,1737
Saccarosio . . . . .	0,1845
Acido . . . . .	0,1882
Chinino . . . . .	0,2581

Ma, anche così, le differenze fra i tempi di reazione allo zucchero e all'acido sono ancora troppo piccole per non generare il dubbio che anch'esse, come le differenze fra i valori corretti, siano dovute a combinazioni fortuite. (Gli autori stessi hanno già pensato a questa possibilità). La legge di Schirmer si manifesta chiaramente nei valori corretti di H. solo nelle differenze dei valori di tempo per il chinino e le altre sostanze. Ma non è ne-

(1) Op. cit. pag. 30.

cessario eseguire esperimenti sui tempi di reazione per stabilire che sostanze amare si percepiscono sulla punta della lingua molto più tardi che le altre sostanze sapide. La legge di Schirmer è assai più evidente, per contro, nelle osservazioni del dott. D. e nelle mie.

Se si ingrandisse la superficie stimolata, i valori di tempo diminuirebbero, e, viceversa, diminuendo la superficie, essi aumenterebbero. Di più, è certo che, diminuendo l'intensità dello stimolo, i tempi diventeranno più lunghi. Ma, malgrado l'esattezza dei metodi che la scienza moderna ha a sua disposizione, è probabile che le differenze personali dipendenti dall'incertezza, più volte accennata, nel reagire a stimoli gustativi, rimangano sempre più notevoli che quelle trovate finora nelle reazioni a stimoli visivi, uditivi e tattili.

Forse dei fattori analoghi hanno influito sulla determinazione di valori di tempo trovati per le reazioni a stimoli olfattivi, se, come suppone il Wundt, le differenze non sono dovute in parte già alle condizioni degli esperimenti, le quali difficilmente possono in questo campo andare esenti da eventuali cause d'errore (<sup>1</sup>).

Ringrazio vivamente lo studente di medicina sig. Molinario per l'assistenza prestata in questi esperimenti.

**Fisiologia sperimentale.** — *Intorno ai tempi di reazione semplice delle sensazioni tattili di carico.* Nota del prof. FEDERICO KIESOW, presentata dal Socio A. Mosso.

**Fisiologia.** — *Le variazioni dell'alcalinità del sangue sulla vetta del Monte Rosa.* Nota del prof. G. GALEOTTI, presentata dal Socio A. Mosso.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(<sup>1</sup>) W. Wundt, *Grundzüge ecc.*, 5<sup>a</sup> ediz., vol. III, pag. 432.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni dei Soci RIGHI e DE LAPPARENT; richiama inoltre l'attenzione della Classe sui fascicoli 23 e 24 contenenti i risultati delle campagne scientifiche del Principe di Monaco; sugli *Elementi di Algebra*, del dott. F. AMODEO; su vari opuscoli del prof. F. LEBON; e sulla parte 3<sup>a</sup> del *Trattato d'idrografia*, del cap. P. LEONARDI CATTOLICA, della quale parla anche il Vicepresidente BLASERNA.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente BLASERNA dà annuncio della morte del Socio nazionale ANGELO MAFFUCCI, mancato ai vivi il 25 novembre 1903; il defunto Socio faceva parte dell'Accademia, sino dall'11 luglio 1900.

Lo stesso Vicepresidente, prima di dare la parola al Socio VERONESE che deve commemorare il Socio nazionale LUIGI CREMONA, annuncia all'Accademia che alla seduta assiste S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione, on. ORLANDO.

All'Accademia pervenne da S. E. il Sottosegretario di Stato per la Pubblica Istruzione on. PINCHIA, il seguente telegramma.

Presidente Accademia Lincei — Roma.

Sapendo che oggi l'Accademia commemora l'illustre Cremona mio compianto Ministro ed amico, pregola associare i miei sentimenti di memore devozione

PINCHIA.

Il Socio VERONESE legge una Commemorazione del Socio CREMONA. Questa Commemorazione sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Il Socio TODARO legge la seguente Commemorazione del Socio straniero GEGENBAUR.

*Egregi ed illustri Colleghi,*

Il 14 giugno di quest'anno fu giorno di lutto per l'Università di Heidelberg: moriva CARLO GEGENBAUR. Ma mentre la salma, cui furono resi i più grandi onori, venne sepolta nel Camposanto di quella città, l'opera sua vive negli annali della scienza a testimonianza del suo altissimo ingegno.

Carlo Gegenbaur appartenne all'Accademia dei Lincei dal 20 dicembre 1887, in cui la Classe delle Scienze, riunita in solenne consesso, a pieni suffragi, lo elesse Socio straniero.

Di tale nomina egli si tenne altamente onorato e si professò gratissimo agli Accademici. Nella lettera, con la quale rispose al nostro compianto Presidente Francesco Brioschi, ricordò che la Germania ha ricevuto i lumi dalla coltura italiana, che la scienza da lui professata ha avuto in Italia le più antiche e profonde radici, e che le due nazioni, raggiunta ciascuna la propria unità, si sono strette in alleanza per gli scopi altissimi della civiltà e del progresso.

« Da questa triplice fonte, egli scrisse, nasce la mia profonda simpatia per l'Italia, alla quale si aggiunge ora la mia profonda gratitudine per l'alto onore che mi fu concesso dalla più antica Accademia. Ciò sarà per me un eccitamento a progredire nel cammino della ricerca, onde rendermi sempre più degno di codesta Società ».

Un'altra causa di simpatia per l'Italia, della quale non parla nella sua lettera ma che fu per lui fonte di grande sapere, è stata la ricchezza degli animali che popolano lo stretto di Messina, ove passò vari anni della sua vita a studiare e a concepire i disegni dei suoi geniali lavori.

Messina divenne l'attrattiva dei zoologi tedeschi dopo che A. Krohn, il quale vi aveva fatto un lungo soggiorno, fece conoscere nel 1846 col suo lavoro su le *Biphore* (salpe) l'importanza che ha lo stretto per lo studio degli animali inferiori, importanza che era stata luminosamente dimostrata da Lazzaro Spallanzani sul cadere del secolo XVIII, e confermata nel 1844 da Milne Edwards, Quatrefages, ed Emilio Blanchard.

In seguito al 1844 l'affluenza dei naturalisti d'ogni nazione vi divenne tale che si può affermare come la migliore parte della zoologia scientifica del secolo XIX sia stata fatta nello stretto di Messina e nel Golfo di Napoli sul quale, Filippo Cavolini, Giuseppe Saverio Poli, Stefano Delle Chiaje ed Oronzio Gabriele Costa avevano richiamata già, con i loro importanti lavori, tutta l'attenzione dei zoologi. Ma a motivo dell'abbondanza degli animali ed anche della relativa facilità della pesca nello stretto, prima che sorgesse in Napoli la Stazione zoologica, Messina era ritenuta di molto superiore. E i naturalisti della Germania vi accorsero in piccoli drappelli o carovane scientifiche, cosicchè il De Filippi di Torino soleva chiamarla la Mecca de' liberi docenti di scienze naturali delle Università tedesche.

Una delle prime spedizioni fu quella che nell'autunno del 1852 vi fecero A. Kölliker, H. Müller, professori a Wurzburg, e C. Gegenbaur che in quest'Università si era addottorato in medicina l'anno precedente. I primi due giunsero in Messina quasi contemporaneamente verso la metà di agosto, e vi si fermarono fino ai primi del mese di ottobre; il Gegenbaur raggiunse i suoi due maestri alla metà di settembre, e vi rimase per tutto l'inverno successivo. Un sunto delle ricerche loro apparve l'anno dopo nel quarto volume della *Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie*, nel quale è distinta la parte che spetta a ciascun di loro. Del Gegenbaur vi sono le indagini su lo sviluppo degli Echinodermi, su quello del Pneumaderma, insieme al Kölliker,

e su quello delle Meduse e delle Velelle, non che lo studio sui rapporti della circolazione degli Heteropodi e dei Pteropodi, e quello su la struttura loro, su la quale continuò le ricerche, esposte poi nella sua Monografia pubblicata nel 1855.

Già nel 1851 il Gegenbaur aveva pubblicato i suoi due primi lavori, nei quali si rivela il suo talento per gli studi di anatomia e per la comparazione degli animali: uno intorno al crâne dell'Axolotl, insieme con N. Friedreich; l'altro sopra i peli tattili. Nella tesi di Laurea, che fece in quell'anno e della quale pubblicò un sunto nell'anno successivo, trattò lo sviluppo del Limax, dando così il primo saggio della sua grande versatilità nelle ricerche embriologiche. Intanto nello stesso anno intraprendeva un viaggio scientifico pe' mari del Nord, dimostrando fin d'allora l'interesse che egli poneva nella conoscenza degli esseri viventi nel mare, per la soluzione dei problemi riflettenti la scienza della natura organica. L'amore di questa scienza gli era stato inspirato, fin dall'infanzia, dalla madre, donna colta nelle scienze naturali.

Nato in Wurzbourg nel 1826 di famiglia cattolica, frequentò dai 14 a' 21 anno, il ginnasio cattolico di quella città. In questa scuola si dava un'eccellente coltura classica, dalla quale trasse grande profitto e ne fu strenuo sostenitore, come quella che costituisce la migliore preparazione per qualunque studio si voglia seguire nell'Università e per i bisogni della vita sociale. Un suo biografo narra che la stretta disciplina chiesastica di quel collegio sortì in lui, come in altri suoi condiscipoli, l'effetto contrario, facendone uomini di vedute religiose larghissime.

E veramente Carlo Gegenbaur lottò in tutta la sua vita per la libertà della scienza e per la conoscenza della verità della natura. Ma in ciò egli attinse la forza dalla coltura italiana della quale fu ammiratore, sapendo come in Italia tale lotta era stata combattuta e vinta da secoli. Gli antichi Lincei, che furono i fondatori della nuova filosofia e che aprirono la via alle esperienze naturali e agli studi sistematici, ricordavano al nuovo eletto « la libertà del pensiero, l'amore della verità, la confessione dell'ignoranza, apprendogli i veri fonti della scienza umana, non dialettica, ma reale, esaltandogli le matematiche e le esperienze naturali per i soli ed unici principî di sapere qualche cosa in questo mondo ».

Nel 1853, al suo ritorno da Messina, il Gegenbaur chiese ed ottenne la libera docenza in anatomia e fisiologia, per la quale pubblicò un notevole scritto sopra la generazione alternante e la propagazione nelle Meduse e nei Polipi. Quindi nel 1855 pubblicò le sue importanti ricerche sopra la struttura degli Heteropodi e dei Pteropodi, a cui ho accennato prima; e mentre si preparava al posto di Prorettore dell'Istituto anatomico di Wurzbourg, lasciato da F. Leydig, per la reputazione che coi suoi lavori aveva saputo acquistarsi venne chiamato a Jena in qualità di professore straordinario di

zoologia nel posto occupato prima da Oscar Schmidt, posto nel quale fu promosso ordinario tre anni dopo, in seguito alla morte di E. Huschke che insegnava anatomia e fisiologia. In tale occasione furono separati questi due insegnamenti: alla fisiologia venne chiamato A. von Bezold; l'anatomia venne unita alla zoologia e data al Gegenbaur, che nel 1862 cedè la zoologia, alla quale fu nominato professore straordinario il suo intimo amico H. Haeckel. Il Gegenbaur rimase a Jena fino al 1873, nel quale anno venne chiamato dall' Università di Heidelberg per succedere a F. Arnold nella cattedra di anatomia, e là continuò a lavorare collo stesso fervore per la scienza e per l'insegnamento fino al suo ritiro, avvenuto nel 1901.

La sua amicizia con H. Haeckel fu una perfetta alleanza intellettuale fra questi due eminenti cultori della zoologia e produsse grandi effetti nel movimento scientifico della Germania. Era fondata sopra « l'eguale sensibilità per la bellezza della natura, l' uguale entusiasmo per le scienze naturali, l'uguale amore per la verità della natura ». Così scrisse H. Haeckel, il quale aggiunse ch'egli offrì al suo amico ciò che poteva dare la sua pronta ed irrequieta gioventù in compenso a quello che riceveva dal Gegenbaur più maturo, più esperto e di otto anni maggiore di lui. Il primo loro incontro fu nel bosco di Gutenberg presso Wurzbourg. Il Gegenbaur parlò con entusiasmo dello stretto di Messina, e l' Haeckel, la prima volta che, seguendo il suo consiglio, vi andò, raccolse a dovizia i frutti che gli servirono per la sua Monografia sui Radiolari.

Nel 1866, H. Haeckel dedica il primo volume della sua Morfologia generale a Carlo Gegenbaur, promotore dell'anatomia; ed il secondo volume a Carlo Darwin, Wolfgango Goethe e Giovanni Lamarck, quali fondatori della Dottrina della discendenza. Ma a canto a loro si deve porre, a mio avviso, Stefano Geoffroy Saint-Hilaire, il quale, alla teoria delle cause finali, dominante nella zoologia per opera del Cuvier, sostituendo la ricerca del nesso fra le cause reali ed i loro effetti, trasformò l'anatomia descrittiva in anatomia scientifica, e pose il principio dell'unità di forma e variabilità delle specie, ch'è il fondamento dell'evoluzione degli esseri viventi, fattori della quale, secondo la Dottrina della discendenza, sono l'adattamento e l'eredità. Egli quindi arrivò a stabilire tale principio seguendo la via indicata dalla nuova filosofia dei Lincei. Per questa medesima via la scuola sperimentale italiana aveva fondato la Biomeccanica, cercando le cause fisico-chimiche, o meccaniche, dell'essere degli organismi viventi, come la Biomeccanica moderna, o la Meccanica dello sviluppo, si propone indagare, con gli esperimenti, le cause fisiche e chimiche del loro divenire.

Carlo Gegenbaur fondò una scuola di illustri anatomici, e pubblicò un numero così grande di importanti lavori che riesce difficile riassumerli e giudicarli tutti in una commemorazione; sarebbe anche lungo il solo enumerarli. Egli considerò gli argomenti più svariati che si riferiscono all'organiz-

zazione ed alla forma degli animali: l'anatomia e l'embriologia, l'istologia e l'istogenia, che trattò tanto dal punto di vista fisiologico ed ontogenetico, quanto da quello morfologico e filogenetico. I suoi lavori rispecchiano due grandi movimenti scientifici della zoologia che si determinarono nel secolo XIX.

Nel tempo in cui il giovane Gegenbaur entrava studente di Medicina nella Università di Wurzburg, era avvenuta in Germania una forte reazione contro la filosofia della natura, che, esposta mirabilmente dallo Schelling ed applicata dall'Oken alla storia naturale, trascinava fuori strada la scienza tedesca. Questa salutare reazione fu opera di Giovanni Müller, il quale richiamò gli studiosi alla osservazione ed alla esperienza dei fenomeni naturali, secondo i dettami della filosofia dei Lincei e, giovandosi della chimica organica e della fisica, aggiunse all'anatomia comparata lo studio delle funzioni. Da ciò il bisogno grandissimo di approfondire la struttura degli organi nei loro peculiari elementi ed intimi rapporti.

Punto di partenza di questo studio fu la teoria cellulare del suo discepolo Teodoro Schwann, secondo la quale gli atti della vita accadono in un piccolo corpo, cui si dà il nome di cellula che, moltiplicandosi e differenziandosi, va a formare i tessuti componenti gli organi delle piante e degli animali. A. Kölliker, F. Leydig, H. Müller e R. Virchow, che furono i maestri dai quali il Gegenbaur dice aver ricevuto i maggiori vantaggi, camminarono luminosamente nella via aperta da G. Müller e, eseguendo le ricerche con vari scopi, contribuirono a dimostrare l'importanza della anatomia comparata, della embriologia e della fisiologia.

Anche C. Gegenbaur portò il valeducibile contributo del suo potente ingegno e della sua grande attività a questi tre rami del sapere, estendendo le sue numerose ricerche ai Protozoi, Celenterati, Echinodermi, Vermi, Crostacei, Molluschi, Tunicati e Vertebrati. Fra i lavori fatti in questo indirizzo sui Vertebrati, oltre quello sulla corda dorsale, sono notevoli le ricerche istologiche ed istogenetiche sopra il tessuto osseo, nelle quali, seguendo H. Müller, viene a dimostrare come questo tessuto, che è di formazione secondaria, origina sempre dal tessuto congiuntivo ordinario anche quando viene a sostituire la cartilagine. È pure importante, per il risultato cui egli giunse, la Memoria intorno all'ovo dei Vertebrati; avendo dimostrato, contro la comune credenza, che l'ovo non è una formazione complessa ma una semplice cellula differenziata. Il valore di tale risultato si collega all'importanza della scoperta dell'ovo nei mammiferi, fatta nel 1827 da K. H. von Baer, il quale dipoi, con una lunga serie di ricerche embriologiche, venne a stabilire la teoria dei tipi nell'embrione.

Il Baer infatti sostenne che negli animali vi è una forma fondamentale la quale si differenzia secondariamente: l'ovo, secondo lui, ha la stessa composizione in tutto il regno animale. Quando poi si sviluppa il germe, esso presenta successivamente i caratteri della classe, dell'ordine, del genere e della specie cui appartiene. Gli animali, somiglianti in origine, si differenziano

uno dall'altro nello sviluppo per raggiungere la forma nell'adulto. Il Baer con le sue osservazioni e riflessioni esercitò una grande efficacia sulla scienza in Germania, efficacia che fu pure esercitata da W. Goethe con le sue geniali vedute nella botanica e nella zoologia. Questi due potenti ingegni contribuirono entrambi a dare un nuovo avviamento alla zoologia.

Nel 1886, parlando dei suoi rapporti con Gegenbaur, Haeckel diceva: « Noi abbiamo lavorato nella più felice divisione il nostro comune campo scientifico, dando e ricevendo fedelmente; negli stessi ambienti, nei quali mezzo secolo prima il Goethe cominciava le sue ricerche sopra la morfologia degli organismi, anche noi, in parte cogli stessi mezzi scientifici, abbiamo coltivato i germi da lui sparsi nella investigazione della natura meditata e comparata ». Certamente la riforma scientifica era stata preparata in Germania da W. Goethe e da K. H. von Baer, come in Francia da Lamarck e da S. Geoffroy Saint-Hilaire; ma la spinta per entrare nella nuova via venne data dal classico libro sull'origine delle specie, pubblicato nel 1859 da Carlo Darwin.

I lavori del Gegenbaur in questo nuovo indirizzo si riferiscono ai Vertebrati, che egli pose sotto una nuova luce, aprendo la via alla ricerca scientifica in varie direzioni, le quali sono state seguite dai suoi scolari e da altri osservatori per dare la spiegazione filogenetica degli organi. Così, per esempio, dimostra che la plica frangiata, la quale si osserva nella faccia inferiore della lingua dei bambini, è omologa alla lingua accessoria inferiore delle Scimie, che a sua volta corrisponde alla plica mucosa che rappresenta la lingua nei Vertebrati più bassi: così anche egli dimostra che le glandole mammarie derivano da un ulteriore sviluppo filogenetico delle glandole sebacee della pelle. Ma senza fermarmi sopra altri argomenti particolari, trattati da lui sotto il punto di vista morfologico, richiamo l'attenzione sopra le Memorie che egli pubblicò intorno allo sviluppo filogenetico degli arti e della testa, come quelle che sono di maggiore importanza.

Nelle sue ricerche sopra la morfologia degli arti dei Vertebrati il Gegenbaur ha trovato che, nonostante lo sviluppo ontogenetico diverso, le due paia di membra dei Vertebrati presentano, nella disposizione del loro scheletro, un piano fondamentale comune, nel quale si distingue un arco costituente il cinto scapolare o pelvico poggiato sulla colonna vertebrale, ed uno scheletro della parte libera del membro, da lui chiamato architterigio (*archipterigium*), articolato col cinto che lo sostiene.

Sebbene le interpretazioni da lui date sull'origine primitiva degli arti abbiano dato luogo a numerose controversie, che potranno essere risolute solamente con ulteriori ricerche, pur tuttavia a lui spetta il merito di avere richiamato l'attenzione e la discussione sopra un argomento di tanta importanza.

Ma veramente i lavori che più hanno interessato i morfologi sono quelli nei quali egli tratta della composizione del cranio dei Vertebrati, ed in cui ha esposto la teoria segmentale che lo ha elevato tra i più grandi.

Essendo stata riconosciuta erronea la teoria vertebrata per la dimostrazione della composizione del cranio, Gegenbaur vi sostituì la sua teoria segmentale colla quale, seguendo il metodo induttivo, cerca di risolvere anatomicamente il problema per mezzo della comparazione tra i segmenti cranici e gli altri organi segmentali della testa.

Egli partì dal fatto che mentre lo scheletro cartilagineo della colonna vertebrale è diviso in segmenti o metamere, il cranio cartilagineo è tutto di un pezzo, e si riteneva allora che tale fosse anche il primo lineamento dal quale deriva il cranio primordiale membranoso. Quindi egli, dopo avere distinto il cranio in due parti, vertebrale ed evertebrale secondaria, cercò di stabilire il numero dei segmenti cranici, per mezzo dell'induzione, vale a dire: dall'osservazione anatomica dei segmenti degli altri sistemi organici della testa (nervi, scheletro branchiale), egli desume il numero dei segmenti che compongono il cranio vertebrale.

Ma le ricerche embrionali successive hanno dimostrato che, prima della formazione del cranio primordiale, il mesoderma della testa è diviso in segmenti come quello del tronco, che si possono osservare direttamente. Tuttavia la questione è rimasta ancora insolita; poichè così le ricerche embrionali, come le successive ricerche anatomiche, hanno sollevato altre vedute su le quali ancora non sono d'accordo gli osservatori; ed intanto l'idea geniale del Gegenbaur è stata e rimarrà il punto di partenza di ogni ricerca che si riferisce a questo grande problema, al quale accanto a Wolfgang Goethe e Lorenzo Oken sta scritto il nome di Carlo Gegenbaur.

Oltre a' numerosi lavori originali il Gegenbaur scrisse, mentre era professore a Jena, un trattato di anatomia comparata che ha avuto diverse edizioni ed è stato tradotto in varie lingue. Durante il suo soggiorno nell'Università di Heidelberg pubblicò un trattato di anatomia umana, nel quale per la prima volta l'anatomia dell'uomo è considerata anche dal punto di vista morfologico; e negli ultimi anni un nuovo trattato d'anatomia comparata dei Vertebrati con riguardo agli Invertebrati.

Nel 1876, fondò un giornale (*Morphologisches Jahrbuch*) allo scopo di raccogliere i migliori lavori su la morfologia fatti in gran parte dai suoi discepoli. Egli ebbe quindi il temperamento dei grandi riformatori che, dopo avere fondate le dottrine, lavorano a diffonderle e a trascinare nella loro via numerosi proseliti.

Carlo Gegenbaur lascia una traccia luminosa nella scienza, e l'Accademia dei Lincei, che lo novera nel suo Albo fra i Soci più illustri, si unisce oggi al lutto dell'Università di Heidelberg, per lamentare la perdita di tant'Uomo.

V. C.